ganz1912

JEAN PIAGET

Introducción a la epistemología genética

1. - El pensamiento matemático

Biblioteca de Psicología Evolutiva

PAIDOS

INTRODUCCION A LA EPISTEMOLOGIA GENETICA

1. EL PENSAMIENTO MATEMATICO

BIBLIOTECA DE PSICOLOGIA EVOLUTIVA

SERIE 1 GESELL

De la Yale Clinic of Child Development y del Gesell Institute of Child Development

Volumen 1

I

A. Gesell y C. Amatruda
EMBRIOLOGIA DE LA CONDUCTA

II

A. Gesell y F. L. Ilg
EL NIÑO DE 1 A 5 AÑOS

III

A. Gesell y F. L. Ilg
EL NIÑO DE 5 A 10 AÑOS

IV

A. Gesell, F. L. Ilg y L. B. Ames
EL ADOLESCENTE DE 10 A 16 AÑOS

V

A. Gesell
PSICOLOGIA EVOLUTIVA DE 1 A 16 AÑOS

SERIE 2

Volumen 2

E. Hurlock
PSICOLOGIA DE LA ADOLESCENCIA

Volumen 3

H. Werner
PSICOLOGIA COMPARADA DEL DESARROLLO MENTAL

Volumen 4

C. W. Valentine
ANORMALIDADES EN EL NIÑO NORMAL

Volumen 5

Ch. Bühler, H. E. Jones y otros
EL DESARROLLO DEL NIÑO PEQUEÑO

Volumen 6

J. B. Watson, A. T. Jersild y J. E. Anderson
LAS EMOCIONES Y LA PERSONALIDAD DEL NIÑO PEQUEÑO

Volumen 7

M. Rosenberg
LA AUTOIMAGEN DEL ADOLESCENTE Y LA SOCIEDAD

Volumen 8

Otto Rank
EL TRAUMA DEL NACIMIENTO

Volumen 9

B. Inhelder y J. Piaget
DE LA LOGICA DEL NIÑO A LA LOGICA DEL ADOLESCENTE

Volumen 10

J. Piaget
INTRODUCCION A LA EPISTEMOLOGIA GENETICA
1. El pensamiento matemático

Volumen 11

J. Piaget
INTRODUCCION A LA EPISTEMOLOGIA GENETICA
2. El pensamiento físico

Volumen 12

J. Piaget
INTRODUCCION A LA EPISTEMOLOGIA GENETICA
3. El pensamiento biológico, psicológico y sociológico

Volumen 13

Ruth Fridman
LOS COMIENZOS DE LA CONDUCTA MUSICAL

Volumen 10

JEAN PIAGET

ganz1912

INTRODUCCION A LA EPISTEMOLOGIA GENETICA

1. El pensamiento matemático

Prólogo de
Emilia Ferreiro y Rolando García



Título del original francés

INTRODUCTION À L'ÉPISTÉMOLOGIE GÉNÉTIQUE

I. La pensée mathématique

Publicado por

PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE

© Presses Universitaires de France

Versión castellana de

MARIA TERESA CEVASCO
VICTOR FISCHMAN

1ª edición, 1975

ganz1912

IMPRESO EN LA ARGENTINA

Queda hecho el depósito que previene la ley 11.723

Todos los derechos reservados

©

Copyright de la edición castellana, by

EDITORIAL PAIDOS, S.A.I.C.F.

Defensa 599, 3er. piso - Buenos Aires

La reproducción total o parcial de este libro en cualquier forma que sea, idéntica o modificada, escrita a máquina, por el sistema "multigraph", mimeógrafo, impreso, etc., no autorizada por los editores, viola derechos reservados. Cualquier utilización debe ser previamente solicitada.

INDICE

PRIMERA PARTE

EL PENSAMIENTO MATEMATICO

PRESENTACION DE LA EDICION CASTELLANA

La extraordinaria difusión que ha tenido la obra de Piaget en los últimos años ha quedado circunscripta, en forma casi exclusiva, al dominio de los psicólogos y al de los pedagogos. En ambos campos los aportes de la psicología genética han revolucionado las concepciones clásicas sobre la inteligencia y los procesos de aprendizaje.

Sin embargo, es en el campo de la epistemología donde deben buscarse los fundamentos de la obra piagetiana. Piaget es, ante todo, un epistemólogo. Su interés no reside en el desarrollo de la psicología ni en sus aplicaciones a la pedagogía: su interés está centrado en los mecanismos de producción de conocimientos y es en virtud del modo particular de plantear ciertos interrogantes epistemológicos que Piaget es conducido necesariamente al desarrollo de una teoría psicológica, dada la insuficiencia de la psicología que encuentra "a disposición". Es solamente desde la perspectiva que ofrece su teoría del conocimiento que se torna posible descubrir la significación global de su obra y su fuerza explicativa.

Lamentablemente, la epistemología genética es poco y mal conocida (no sólo en nuestro medio). Un análisis de las características diferenciales de esta posición epistemológica clarificará al mismo tiempo las razones de esta situación.

I

A) El núcleo central de las dificultades con las cuales se tropieza para llegar a una interpretación correcta de la teoría de Piaget reside, sin duda, en el rol particular que juegan en ella tanto la psicología como la lógica.

La relación de la psicología con la epistemología ha sido considerada de manera muy diversa en la historia de la filosofía. En general, la pertinencia de argumentos psicológicos, para fundamentar aserciones de carácter epistemológico, ofrece serias reservas excepto en el caso de aquellos que sustentan posiciones que caen en el "psicologismo".

La reacción contra el psicologismo condujo, en gran medida, a ignorar la psicología como instrumento para el análisis de problemas específicos de toda teoría del conocimiento. Ignorar la psicología no significa, sin embargo, prescindir de ella. No mencionarla, tampoco significa no utilizarla. Un ejercicio interesante, y de resultados muy sorprendentes, consiste en dedicarse al análisis de las presuposiciones de carácter psicológico que están

implícitas —o que se enuncian sin justificación— en las teorías del conocimiento que están en boga. Lo que más sorprende en tales circunstancias es la superficialidad con la cual se manejan, en este terreno, aun aquellos epistemólogos que en cualquier otra disciplina exigen la aplicación de un riguroso método científico para fundamentar cada aserción. Esta situación tiene dos raíces muy evidentes que el propio Piaget ha puesto de manifiesto en numerosas ocasiones. La primera de ellas —muy justificable— es el estado de inmadurez que ha caracterizado a la psicología experimental como disciplina científica, tanto por la unilateralidad de sus métodos como por la esterilidad de sus resultados. La segunda —mucho menos justificable— reside en lo que podríamos llamar "la ingenua aceptación de la introspección como método" (o, aun, como *el* método), lo cual permite a cada uno convencerse de que sus "reflexiones" sobre la naturaleza de los mecanismos psicológicos que actúan en los procesos cognoscitivos no son susceptibles de verificación experimental, ni tampoco lo requieren. La psicología, como lo señala Piaget, tiene un triste privilegio: es la ciencia en la que todos se creen con competencia para hablar.

En los casos en que se reconoce que la psicología juega un rol importante en el análisis de los problemas epistemológicos, su lugar suele reducirse al de un dominio muy restringido cuya definición y justificación queda, también, en el campo de la reflexión o especulación filosófica. Un ejemplo característico lo encontramos en Bertrand Russell. En su última obra de carácter filosófico [1] reitera las dos cuestiones básicas con respecto al conocimiento humano: "¿Qué es lo que conocemos?" y "¿Cómo es que lo conocemos?" Asigna a la ciencia —o, mejor dicho, a las diversas ciencias— la responsabilidad de responder a la primera pregunta. Con respecto a la segunda, Russell va a conceder a la psicología el mérito de ser "la más importante de las ciencias", basándose fundamentalmente en que "toda la materia prima de nuestro conocimiento consiste en eventos mentales en la vida de personas separadas. En esta región, por consiguiente, la psicología es suprema" (pág. 166). Curiosamente, Russell declara "suprema" a la psicología, pero no se pregunta si su afirmación precedente acerca de "la materia prima de nuestro conocimiento" es aceptable para ella.

En la misma obra Russell establece una distinción entre "creencias" (recordemos que para Russell "conocimiento" es "una subclase de creencias verdaderas") y declara que aquellas creencias que no pueden sustentarse en ninguna otra razón son las que tienen mayor importancia para la teoría del conocimiento, puesto que ellas constituyen "el mínimo indispensable de premisas para nuestro conocimiento de cuestiones de hecho". A tales creencias las llama "datos" y las define así: "Aquellas cuestiones de hecho acerca de las cuales, *independientemente de la inferencia*, tenemos derecho a sentirnos muy cercanamente en lo cierto" (pág. 171, la bastardilla es nuestra). Nuevamente aquí tenemos que afirmar que, curiosamente, después de ha-

[1] *Human knowledge, its scope and limits*. Nueva York, Simon and Schuster, 1948, págs. 52-53. [Hay versión castellana: *El conocimiento humano*. Madrid, Taurus, 1966.]

berle otorgado el cetro a la psicología para decidir acerca de estos problemas, Russell hace estas afirmaciones sin preguntarse si ellas resisten a la investigación en dicha disciplina. La razón última por la cual procede así reside, quizá, en que para él como para todo el empirismo lógico y posiciones afines, "psicología" designa siempre alguna forma de conductismo que aceptan sin cuestionar. Pero, ya en la época en que Russell escribió esta obra, la psicología genética había acumulado suficiente evidencia experimental como para invalidar las aseveraciones arriba citadas.

Con respecto a las relaciones entre lógica y psicología, Piaget ha sido acusado frecuentemente por los lógicos de hacer "psicologismo", en tanto que ha sido acusado por los psicólogos de caer en el "logicismo". En lo que respecta a la acusación de "psicologismo" es preciso recordar lo siguiente: los "objetos" de los cuales se ocupa la lógica son las proposiciones, las clases, las relaciones, las funciones. Ellos son introducidos por *definición* o por *postulados*. Además, se construyen con ellos sistemas formales en los cuales se introducen *reglas de deducción*. Pero la lógica no *crea* todo esto de la nada, sino que lo toma de las *estructuras operatorias* del sujeto. Una parte considerable de la obra experimental y teórica de Piaget ha consistido en poner de manifiesto cuáles son esas estructuras y cuál es su origen. Estudiarlas desde el punto de vista psicogenético no es hacer psicologismo. Las relaciones entre ambas disciplinas están sintetizadas en esta afirmación: "La lógica es una axiomática de la razón de la cual la psicología de la inteligencia es la ciencia experimental correspondiente".[2]

B) Hemos citado más arriba a Bertrand Russell en su formulación de las dos cuestiones básicas de toda teoría del conocimiento: "¿Qué es lo que conocemos?" y "¿Cómo es que lo conocemos?" Piaget va a formular una pregunta, aun más básica, *por medio de la cual* va a poder proponer una respuesta a las dos anteriores. Dicha pregunta es: "¿Cómo pasa un sujeto de un estado de menor conocimiento, a un estado de mayor conocimiento?" Hay numerosos ejemplos, en la historia de la ciencia, de extraordinarios progresos logrados con una modificación en la formulación de las cuestiones básicas. Un "¿Qué es...?" que aparece como pregunta de tipo metafísico, referida a "esencias" —¡y muchas veces lo es!— es reemplazado por un "¿Cómo es que...?" o un "¿En qué condiciones se da...?" Un ejemplo trivial está dado por las llamadas definiciones "por abstracción". Para definir "forma de una figura" no partiremos de la pregunta "¿Qué es forma?", sino "¿Cuándo dos figuras tienen la misma forma?" Es a partir de allí y de las propiedades de la semejanza de figuras que arribamos a la definición de "forma". No hay en ello círculo vicioso, ya que "tener la misma forma" es una expresión que se puede definir *sin presuponer* la definición de forma.

Cuando Piaget reemplaza, como pregunta básica, "¿Qué es conocimiento?" o "¿Qué es lo que conocemos? por "¿Cómo se pasa de un estado de menor conocimiento a otro de mayor conocimiento?", la situación es

[2] *La psychologie de l'intelligence*. París, A. Colin, 1946, pág. 34. [Hay versión castellana: *Psicología de la inteligencia*. Buenos Aires, Siglo Veinte, 1966.]

análoga, pero con una diferencia fundamental: no va a intentar definir las expresiones "estado de conocimiento" y "estado de mayor conocimiento", sino que las toma del *contexto social* y las acepta tal como son aceptadas por una comunidad social dada en un momento dado. No hay aquí ni círculo vicioso, ni petición de principio. Hay, obviamente, un *punto de partida metodológico*, que consiste en la aceptación del concepto de conocimiento que surge de la *práctica social*. Pero esta posición va a implicar la eliminación de todo *punto de partida epistemológico*. Esto puede verse fácilmente por las consideraciones siguientes.

Partimos de un nivel de conocimiento de un sujeto, en un momento dado t_0, en cual, desde el punto de vista de un observador externo —es decir, de un sujeto de otro nivel—, no es capaz de resolver ciertos problemas, o contestar ciertas cuestiones, o manejar adecuadamente ciertas situaciones. Después de cierto intervalo de tiempo, llega un momento, t_1, en el cual ese mismo sujeto resuelve fácilmente aquello que antes no podía.

El estudio de los mecanismos en juego que permiten el pasaje del "no poder" al "poder hacer" constituye, como hemos dicho, la cuestión básica que Piaget se plantea. En un mismo individuo, podríamos plantearnos el pasaje sucesivo a nuevos niveles de conocimiento, en momentos sucesivos t_2, t_3, ... t_n, aunque no podemos investigar en *ese* individuo cómo llegó al nivel identificado en el instante t_0, a partir de niveles anteriores. Pero el problema así planteado es artificial.

El resultado de los trabajos experimentales centrados particularmente en el período que cubre la infancia y la adolescencia, muestra sorprendentes regularidades en el comportamiento de los sujetos que permiten clasificarlos en grupos que corresponden aproximadamente —aunque a veces con desviaciones notables— a grupos clasificados por edades. El estudio de cómo llegó al estado de conocimiento que tenía en el momento t_0 el individuo hipotético del cual partimos, se puede transferir al estudio de grupos de sujetos que estén en un nivel inferior. Podemos pues remontarnos hacia atrás en la edad de los sujetos, hasta el momento mismo de nacer, y aun antes, hundiéndonos en lo biológico.

Subrayemos que este estudio es *experimental*, que corresponde al campo de la *psicología* genética y que se enlaza en un momento dado con la biología. Piaget, como *epistemólogo*, va luego a sacar conclusiones para la teoría del conocimiento. Dichas conclusiones permiten *invalidar*, o refutar, ciertas concepciones epistemológicas sustentadas por otras escuelas filosóficas. Pero van a permitir, también, formular hipótesis y construir una teoría que sea *compatible* con todos los resultados experimentales y que permita interpretarlos y explicarlos dentro de un marco conceptual adecuado.

Hay, sin embargo, una aclaración importante que formular con respecto a lo enunciado anteriormente: cuando hablamos del pasaje de un "no poder" a un "poder hacer" estamos adoptando el punto de vista de un observador externo. Pero si adoptamos el punto de vista del sujeto, ese "no poder" se transforma en un modo particular de "poder hacer", ese "no comprender" se transforma en un modo particular de comprender. Y

si el observador externo no se limita a aplicar sus propias normas lógicas para evaluar el comportamiento del sujeto, no puede dejar de reconocer que ese sujeto aplica ciertas normas en un nivel y aplicará otras en el nivel siguiente, modificando sin cesar sus propias normas hasta alcanzar el nivel que el observador externo considera como nivel de "razonamiento lógico". El psicólogo está enfrentado con un hecho: hay un sujeto que utiliza ciertas normas, esas normas evolucionarán según una progresión regular. Su tarea es explicar el origen de esas normas (aceptadas, impuestas, construidas, etc.) y las razones de su evolución. Pero el psicólogo no prescribe norma alguna en nombre de la psicología, ni se ocupa en determinar la validez de dichas normas, sino que las acepta en tanto hechos, evitando cuidadosamente desnaturalizar el carácter de necesidad que tienen para el sujeto.

C) La originalidad de Piaget va a consistir en introducir la verificación experimental dentro mismo de la epistemología, como un método más. En efecto, aunque Piaget haya construido una psicología para dar sustento experimental a sus afirmaciones epistemológicas, el recurso a la psicología no se agota en la referencia a los resultados de otra ciencia, independiente de la epistemología. Es cierto que la caracterización del sujeto cognoscente no podrá hacerse ignorando la psicología, tanto como la caracterización del objeto de conocimiento no podrá hacerse ignorando lo que es ese objeto para las distintas ciencias experimentales (física, química, biología, etc.). La epistemología genética pretende ser ciencia y proceder, en consecuencia, como las demás ciencias, formulando preguntas verificables. Los procedimientos de verificación serán en función de la pregunta, y la verificación empírica se impondrá reiteradamente para conocer la génesis real de ciertas nociones, procesos de inferencia, formas de razonamiento elementales, etc.

Piaget planteará así tres métodos complementarios a utilizar en epistemología genética: el análisis formalizante (problemas de estructura formal de los conocimientos y validez de esos sistemas); el análisis psicogenético (problemas de hecho y no de validez formal referidos a la caracterización de los estados de conocimiento en distintos niveles sucesivos y a los mecanismos de pasaje entre uno y otro); método histórico-crítico (reconstitución de la historia de la ciencia en tanto análisis de los procesos conducentes de un nivel de conocimiento a otro).

D) La posibilidad de compatibilizar las tres metodologías plantea una serie de problemas: las relaciones entre el análisis formalizante y el método psicogenético remiten las relaciones entre lógica y psicología a las que ya nos hemos referido. Pero las relaciones entre el método psicogenético y el histórico-crítico han dado lugar también a equívocos sistemáticos. Piaget no pretende explicar la ontogénesis a partir de la sociogénesis del conocimiento, ni a la inversa; tampoco pretende sugerir que la ontogénesis recapitula la sociogénesis. ¿Cómo se explican entonces las referencias cruzadas, tan frecuentes en sus obras epistemológicas, donde se confrontan datos relativos a la ontogénesis del conocimiento con datos relativos a la historia de la ciencia? Lo que interesa a Piaget es, como señalaremos más adelante, encontrar un modelo general explicativo del pasaje de un estado de menor

conocimiento a otro de mayor conocimiento; las comparaciones entre ambos tipos de génesis apuntan a la consideración de los mecanismos generales de organización, desequilibración y reequilibración. Por otra parte, la legitimidad de la comparación está sustentada en la demostración de una continuidad entre el conocimiento "natural" o precientífico y el conocimiento científico. Finalmente, es preciso recordar que el método psicogenético no es privilegiado de entrada, sino que recurrir a él está justificado por la imposibilidad de controlar experimentalmente las afirmaciones relativas a la historia de la ciencia y por la imposibilidad de remontarse hasta los estados iniciales que precedieron a la ciencia constituida.

"Reconstituir el desarrollo de un sistema de operaciones o de experiencias es, ante todo, establecer su historia, y los métodos histórico-críticos y sociogenéticos bastarían para alcanzar los fines epistemológicos perseguidos si pudieran ser completos, es decir, remontarse más allá de la historia misma de las ciencias hasta el origen colectivo de las nociones, o sea hasta su sociogénesis prehistórica. Porque esto es imposible ya que las nociones científicas han sido inicialmente extraídas de las del sentido común, y que la prehistoria de estas nociones espontáneas y comunes puede quedar siéndonos desconocida para siempre; es por esto, pues, que es conveniente completar el método histórico-crítico con los métodos psicogenéticos".[3]

E) Ya hemos insistido sobre el modo de plantear las relaciones entre epistemología y psicología. ("La epistemología genética consiste simplemente en tomar en serio los aportes de la psicología en lugar de contentarse con recursos implícitos o especulativos, como ocurre con la mayor parte de las epistemologías", señala con humor el mismo Piaget.) Por supuesto que ese planteo es resistido en la medida en que se contrapone a otras concepciones epistemológicas, pero la resistencia hubiese sido menor si Piaget hubiera recurrido a la psicología experimental clásica, cuyo objeto es saber cómo funciona el sujeto adulto. La idea estrictamente escandalosa de Piaget consiste en justificar que el sujeto que interesa a la epistemología es el sujeto en desarrollo, que la investigación sobre el modo de adquisición de conocimientos de un lactante es pertinente para la resolución de problemas tradicionalmente reservados a la especulación filosófica. Es útil recordar que la objeción principal que encuentra Piaget a su idea de creación de un Centro Internacional de Epistemología Genética es precisamente ésta: ¿cómo puede pretender abordar problemas epistemológicos vinculados con el conocimiento científico interrogando a los chicos que no saben nada de nada o que a lo sumo repetirán lo que hayan escuchado decir a los adultos? Prácticamente en estos términos se expresa Wheaver sin sospechar que su pregunta contiene una afirmación de hecho que es preciso validar empíricamente. Wheaver, que seguramente no se atreve a opinar de física o química sin información suficiente, expresa en términos muy claros la concepción general que refleja un prejuicio adulto acerca de

[3] "Les méthodes de l'épistémologie" en J. Piaget (comp.): *Logique et connaissance scientifique*. París, Gallimard, Enciclopédie de la Pléïade, 1967, págs. 105-106. [Hay versión castellana: *Naturaleza y métodos de la epistemología*. Buenos Aires, Proteo, 1970.]

la niñez: ausencia de saber o simple reflejo-copia del saber ajeno. Y, si fuera realmente así, es claro que el recurso a la psicogénesis no aportaría gran cosa a la investigación epistemológica. Pero cuando Piaget escribe esta obra, que le servirá de "carta de presentación" para su proyecto largamente acariciado de un Centro Internacional de Epistemología Genética, tiene detrás suyo unos treinta años de investigación sobre el pensamiento infantil cuyos resultados le permiten afirmar que, desde los niveles más elementales del desarrollo, el conocimiento no es jamás copia pasiva de la realidad externa, pálido reflejo de la transmisión social, sino creación continua, asimilación transformadora. Esos treinta años de investigación psicológica no están destinados a darnos un "catálogo" de conductas características de cada edad; el niño no le interesa por sí mismo sino en tanto predecesor (y padre) del adulto; es un planteo epistemológico y no psicológico el que lleva a Piaget a investigar la formación de las categorías espaciotemporales, la comprensión de las relaciones causales, el principio de identidad, la transitividad de las relaciones, etcétera.

II

No es éste el lugar de hacer una presentación resumida de la teoría epistemológica elaborada por Piaget. Sin embargo creemos que podría ser útil señalar ciertos conceptos claves que permiten ubicarla y diferenciarla netamente dentro del campo de las teorías epistemológicas contemporáneas.

1) La concepción básica más original de esta teoría epistemológica consiste en afirmar que la *acción* es constitutiva de todo conocimiento. El conocimiento es dependiente de la acción y la acción es productora de conocimiento. Esta primacía de la acción se sustentará genéticamente a partir del análisis de las conductas más elementales del recién nacido. El sujeto no conoce más propiedades de las cosas que aquellas que su acción le permite conocer. El mundo del lactante no se compondría de objetos tales como nosotros podríamos describirlos, sino que se compondría de cosas chupables, agarrables, mirables, escuchables, etc. "Cosas" que todavía no son objetos del mundo físico, sino impresiones sensoriales complejas, imposibles de ser atribuidas con precisión al mundo externo o al mundo interno. Paulatinamente se irá produciendo un doble movimiento de integración del sujeto y del objeto: en la medida en que el sujeto coordine sus acciones comenzará a dar unidad al objeto con el que interactúa (por ej., en la medida en que la coordinación de los esquemas le permita llevar al campo visual lo que la mano agarra, las cualidades de mirable y agarrable serán atribuidas al mismo objeto). La complejización del objeto es entonces correlativa con la complejización y organización del sujeto: solamente la coordinación de los esquemas de acción permitirá dar unidad a los objetos, a través de la unidad de la acción.[4]

[4] Véase *La naissance de l'intelligence chez l'enfant*. Neuchâtel, Delachaux & Niestlé, 4ª ed., 1963. [Hay versión castellana: *El nacimiento de la inteligencia en el niño*. Madrid, Aguilar, 1969.]

En la acción elemental todavía no puede hablarse, en sentido estricto, ni de un sujeto ni de un objeto. Poner en el punto de partida la acción es, por un lado, sustituir las opciones clásicas (primacía del sujeto en el idealismo o del objeto en el empirismo) con un nuevo enfoque: la primacía es la del vínculo práctico, de la interacción efectiva, de la acción objetiva. Pero, por otro lado, es adoptar una perspectiva constructivista que dé cuenta de la constitución del sujeto en tanto sujeto cognoscente y del objeto en tanto objeto de conocimiento.

Por medio de la acción los objetos serán incorporados por el sujeto a esas categorías: serán asimilados a los esquemas de acción. La noción de esquema expresa "el conjunto estructurado de los caracteres generalizables de la acción, es decir de aquellos que permiten repetir la misma acción o aplicarla a nuevos contenidos".[5] El concepto de asimilación sustituirá al término clásico de asociación, pero no se trata de un mero cambio de palabras: hablar el lenguaje de la asimilación en lugar del lenguaje de la asociación involucra adoptar el punto de vista del sujeto para describir el objeto con el que interactúa y, fundamentalmente, rescatar la noción de significación, apartándose del mecanicismo sin caer en la metafísica idealista. "Cualquier conocimiento comporta siempre y necesariamente un factor fundamental de asimilación que es el único que confiere una significación a lo que es percibido o concebido".[6] La asimilación, entonces, confiere significados al hecho externo, y es transformadora del objeto a través de esa incorporación de significaciones. Pero, a su vez, el objeto exigirá modificaciones del esquema asimilador, en virtud de sus propias características objetivas que actuarán como un obstáculo a la asimilación completa. De esta manera el objeto es modificado por el sujeto, pero éste es obligado a modificarse por aquél.

Las consecuencias epistemológicas de este planteo son de primera importancia. Por una parte, permite superar la dicotomía entre pensamiento y acción. Tal como lo señala Piaget en esta obra "todas las teorías no-genéticas conciben al pensamiento como anterior a la acción y a ésta como una aplicación de aquél".

Por otra parte, Piaget se ubica sin pretenderlo en directa continuación de la línea epistemológica del materialismo dialéctico, que precisamente trata de superar esa dicotomía entre conocimiento y acción a través de la noción de praxis. Sin embargo en los textos de Lenin (particularmente en *Materialismo y empiriocriticismo*) resulta evidente la preeminencia del dato sensorial (percepciones y representaciones como imágenes de las cosas del mundo externo) apareciendo la praxis como verificadora de un conocimiento obtenido de otra manera (verificación de esas imágenes obtenidas vía sensorial) y no como constitutiva de todo conocimiento.

El poner a la acción como única fuente de conocimiento le permite a Piaget resolver de una manera extremadamente original el problema del

[5] *Études d'épistémologie génétique*, vol. XIV, pág. 251.

[6] *Biologie et connaissance*. París, Gallimard, 1967, pág. 14. [Hay versión castellana: *Biología y conocimiento*. Buenos Aires, Siglo XXI, 1970.]

origen del conocimiento lógico-matemático. A este problema dedica Piaget buena parte del primer volumen de esa *Introducción*. Luego de su polémica con Beth ambos publicarán juntos el volumen XIV de los *Études d'épistémologie génétique*,[7] obra esencial para profundizar el tema. No obstante, en estos últimos años Piaget ha vuelto sobre el punto, con un análisis más profundo del mecanismo de construcción de los conceptos lógico-matemáticos: *la abstracción reflexiva*. A este tema está dedicada una de las obras de Piaget en preparación.

2) El rechazo de toda oposición radical entre experiencia y deducción, entre registro e interpretación, entre constatación e inferencia.

En ningún nivel del conocimiento empírico hay una frontera delimitable y neta entre las propiedades del objeto asimilado y las estructuras del sujeto asimilante. Para conocer, el sujeto debe poseer ciertas estructuras asimiladoras que funcionan como órganos de conocimiento. (La analogía con los órganos que garantizan el funcionamiento biológico será algo más que una analogía: en ese símil está contenida una hipótesis muy específica acerca de las relaciones entre lo biológico y lo psicológico, entre la adaptación orgánica y la intelectual). Pero esas estructuras asimiladoras no preexisten a la acción sino que se constituyen en virtud de los requerimientos de la acción. Entre la estructuración que interviene en la experiencia y la estructuración de las construcciones deductivas hay, desde el punto de vista del funcionamiento, sólo una diferencia de grado: así como la experiencia consiste en actuar sobre los objetos, las operaciones deductivas consisten en acciones interiorizadas y coordinadas.

3) Esto replantea en términos bien específicos el problema de la posibilidad de un conocimiento objetivo.

Para Piaget el objeto "es un límite al cual nos aproximamos sin alcanzarlo jamás". Pero, ¿cómo es posible aproximarse a ese límite, lo cual supone una objetivización progresiva del conocimiento? Por lo que hemos visto antes, resulta claro que la objetividad no está garantizada en el punto de partida, no coincide con el contacto perceptivo directo puesto que no hay registro pasivo de los hechos, y mal podría coincidir con un apartamiento del sujeto. En la concepción epistemológica sustentada por Piaget, un incremento de objetividad será dependiente de un incremento de actividad por parte del sujeto. El pensamiento es en sus comienzos deformante porque se basa en la consideración aislada de ciertas relaciones privilegiadas. El progreso en el desarrollo del pensamiento consistirá en coordinar progresivamente puntos de vista diferentes, relaciones antes inconexas, en multiplicar las puestas en relación, en una palabra, en integrar sistemas parciales en estructuras de conjunto. La objetividad aparece así indisolublemente ligada a un incremento de actividad organizadora por parte del sujeto.

Piaget va a indicar explícitamente que el objetivo de cada ciencia es "la conquista del objeto", un objeto que existe independientemente de ella,

[7] E. W. Beth y J. Piaget: *Epistémologie mathématique et psychologie*. París, P.U.F., 1961. [Hay versión castellana: *Relaciones entre la lógica formal y el pensamiento real*. Madrid, Ciencia Nueva, 1968.]

aunque "se modifica a medida que tiene lugar esa conquista, pero proveyendo los índices de una creciente aproximación".[8]

Vale la pena recordar la anécdota acerca del diálogo que mantiene Piaget con Kedrov y Rubinstein en la Academia de Ciencias de la U.R.S.S., para comprender la distancia que separa a Piaget de una posición idealista.[9] Kedrov le pregunta: "¿Cree usted que el objeto existe antes del conocimiento?" Piaget responde: "En tanto psicólogo no lo sé, porque sólo conozco el objeto actuando sobre él, y no puedo afirmar nada acerca de él antes de esta acción". Rubinstein reformula la pregunta: "Para nosotros el objeto es una parte del mundo. ¿Cree usted que el mundo existe antes del conocimiento?" Piaget responde entonces: "Ese es otro problema. Para actuar sobre el objeto me es necesario un organismo y este organismo también forma parte del mundo. Creo entonces, evidentemente, que el mundo existe antes del conocimiento, pero nosotros no lo recortamos en objetos particulares, sino en el curso de nuestras acciones y por interacciones entre el organismo y el medio".

4) Una de las ideas centrales de la epistemología genética es la siguiente: *tanto la naturaleza como la validez de los conocimientos dependen de su modo de formación.* Se objetará que se confunden aquí dos problemas bien diferentes: el de la validez (problema normativo) con el proceso de formación de conocimientos (problema empírico). Sin embargo no es así, y merece citarse por su claridad un párrafo del "Prefacio a la segunda edición" en francés de esta misma *Introducción*, redactado por Piaget en 1972:

"Esa objeción supone, en efecto, la existencia de tres elementos o de tres personajes diferentes en el análisis de todo acto de conocimiento: 1) el sujeto de este conocimiento, que razona a su manera según su nivel, su grado de información, etc.; 2) el historiador, el sociólogo o el psicólogo, que estudia el proceso que condujo al sujeto a su estado de conocimiento actual, y 3) el epistemólogo, que evalúa este conocimiento de los sujetos a la luz de normas que este tercer personaje se encarga de proveer en nombre de una filosofía determinada. Pero lo que no se llega a hacer comprender a ciertos filósofos adversarios de la epistemología genética es que el actor nº 2 (el psicólogo, etc.) no intenta en absoluto jugar el rol del actor nº 3 (el normativista), sino solamente devolver su valor al actor nº 1 (el sujeto de conocimiento). Esto conduce evidentemente a la consecuencia molesta de hacer inútil al actor nº 3, pero en beneficio del sujeto mismo y no del actor nº 2 que se limita a describir cómo ese sujeto activo y responsable llegó por sus propios medios a resolver sus propios problemas".

"En efecto, cuando se nos dice que el proceso formativo no es explicativo ni podría constituir una fuente suficiente de evaluación normativa, se olvidan deliberadamente tres hechos esenciales. Se olvida en primer

[8] "Les courants de l'épistémologie scientifique contemporaine" en J. Piaget (comp.): *Logique et connaissance scientifique* (op. cit.), pág. 1260. [De esta parte de la obra no hay traducción.]

[9] *Sagesse et illusions de la philosophie.* París, P.U.F., 1965, págs. 274-275. [Hay versión castellana: *Sabiduría e ilusiones de la filosofía.* Barcelona, Península, 1970.]

lugar que el proceso no es otra cosa que el desarrollo de actividades de un "sujeto", es decir de actividades *creadoras de normas*, y que no se trata de una sucesión psicológica cualquiera de simples estados de conciencia. Se descuida, en segundo lugar, el hecho fundamental de que el sujeto se basta a sí mismo en la elaboración de sus normas: ya se trate de un bebe de diez meses que descubre la permanencia de los objetos o de Einstein en persona que construye sus teorías, el sujeto no tiene necesidad ni del filósofo (personaje nº 3) ni del psicólogo (actor nº 2) para ayudarlo a razonar, ya que él se basta a sí mismo (en tanto individuo o sujeto socializado en grados diversos o en tanto sujeto colectivo) y corrige solo sus errores. Pero, en tercer lugar, se olvida también que, aunque el sujeto es normativamente autónomo, ha necesitado de un desarrollo para llegar hasta allí, porque no ha cesado de modificar sus propias normas y constituye entonces la resultante de ese proceso. El problema reside en el hecho de que el sujeto no conoce sino una ínfima parte de ese proceso y es por ello que es necesario un análisis exterior a él para reconstituirlo. De esto se concluye que el actor nº 2 es necesario, pero no en tanto prescriptor de normas sino exclusivamente en tanto intenta describir y explicar lo que los sujetos han hecho en su autonomía normativa radical de constructores enfrentados con los objetos y con la realidad entera".

5) El último punto que deseamos mencionar es el de la concepción dialéctica que subyace en toda la obra piagetiana.

A la pregunta "¿Cómo se llega a la situación de «tomar conocimiento» de un *dato* provisto por la experiencia?" se podría responder, dentro del marco de la epistemología genética, diciendo: mediante una interacción entre el sujeto y el objeto de conocimiento. Así formulada, la respuesta no es nueva, pero tampoco es respuesta. Simplemente se limita a enunciar que dicho "acto de conocimiento" constituye un *ejemplo* de interacción, pero sin explicar en qué consiste dicha interacción. Tampoco aclara nada el agregar que se trata de una interacción dialéctica, por cuanto el hecho mismo de que la toma del conocimiento *surja* de una interacción entre el sujeto y el objeto significa lo mismo que decir que la interacción es dialéctica. La supuesta respuesta no hace sino explicitar un poco más la naturaleza del problema, pero no lo resuelve.

La novedad de la respuesta piagetiana consiste en haber elaborado, en detalle, una explicación acerca de lo que significa la interacción entre el sujeto y el objeto, haber propuesto un mecanismo para explicar en qué consiste y haber acumulado un impresionante material de carácter experimental para sostener su teoría.

Para comprender la naturaleza dialéctica de la teoría de Piaget debemos retornar a la imagen previamente utilizada de pasajes sucesivos de un "estado de conocimiento" en un momento dato t_0, al estado en momentos posteriores t_1, t_2, etc. Así formulado el problema daría la impresión falsa de una evolución lineal del pensamiento. Pero el hecho fundamental que surge del análisis genético es que la marcha no es lineal sino que constituye un complejo proceso de estructuraciones sucesivas a través de una jerarquía de niveles bien definidos. No se trata —afirma Piaget— de "cortes arbi-

trarios en el seno de un proceso continuo o puramente aditivo" (...) "las estructuras adquiridas en un nivel dan lugar a una reconstrucción antes de que estas estructuras reconstruidas puedan ser integradas en las nuevas estructuras elaboradas sobre los niveles ulteriores".

Cada uno de los niveles constituye un estado de *equilibrio dinámico*, a la manera de los estados de equilibrio (situaciones "estacionarias") de un sistema termodinámico.[10] Piaget llama *equilibración* a dicho equilibrio dinámico para diferenciarlo del equilibrio estático de un sistema mecánico.

En la medida en que el desarrollo del conocimiento es concebido como una sucesión de estados de equilibración, está claro que deberán entrar en juego mecanismos de *desequilibración* de cada nivel y de *reequilibración* en los nuevos niveles que se van alcanzando. Toda epistemología que intente interpretar el desarrollo y la naturaleza de los procesos cognoscitivos deberá explicar en qué consisten dichos mecanismos.

Para aclarar la posición de Piaget a este respecto debemos remitirnos a trabajos realizados en el Centro Internacional de Epistemología Genética durante los últimos años, y que aún no han sido publicados.

Se van a distinguir tres formas de equilibrio:

(i) Entre los esquemas de asimilación y los objetos a los cuales dichos esquemas deben acomodarse (que es, también, un equilibrio entre *forma* y *contenido*).
(ii) Entre los subsistemas que luego se integran en un sistema.
(iii) Entre las *diferenciaciones* (que consisten en introducir, en una totalidad, negaciones parciales, generadoras de subsistemas, pero manteniendo los caracteres positivos de la totalidad) y las *integraciones* (que consisten en reunir, en una totalidad, sistemas que eran independientes o que eran considerados como tales).

El tercer tipo de equilibración, a cuyo análisis teórico y experimental llega Piaget sólo en años recientes, adquirirá una importancia excepcional en su teoría. En él hace reposar la solución del problema que considera como "el más misterioso" de todos los problemas epistemológicos: la *producción* de *nuevos* conocimientos.

Pero aun una descripción de las tres formas de equilibrio no constituye una explicación del proceso. Esta exige explicitar los *mecanismos* en juego.

Aquí surgen dos nociones que son utilizadas con harta frecuencia en las explicaciones de tipo epistemológico, sin que se hayan hecho muchos esfuerzos por aclarar su significado ni, mucho menos, por desentrañar los mecanismos que ponen en juego. Dichas nociones son: *abstracción* y *generalización*. Piaget las usa con sentido bien específico en la presente obra, pero el papel fundamental que juegan en su teoría sólo se pondrá clara-

[10] Un ejemplo trivial lo ofrecen los "cúmulus de buen tiempo" que son esas nubes blancas, aisladas, en forma de torre, que suelen observarse en las tardes soleadas de verano. Parecen objetos inmóviles, pero la proyección cinematográfica de fotografías tomadas a intervalos regulares de tiempo muestra que se trata de un sistema muy activo en permanente disipación y recomposición. Todo organismo viviente es un ejemplo de tal "equilibrio".

mente de manifiesto en trabajos mucho más recientes. Dicho papel no es otro que el de la construcción de *nuevas estructuras en los procesos de reequilibración.*

Las desequilibraciones de cada una de estas tres formas de equilibrio responden a mecanismos específicos. En el primer caso, por ejemplo, todo *esquema asimilador* encuentra, tarde o temprano, un obstáculo o *perturbación* (definido como el objeto que resiste a la asimilación); frente a esa perturbación se ponen en marcha mecanismos de *regulación* que tratan de *compensar* la perturbación. La compensación es compensadora con respecto a la perturbación pero es formadora con respecto al esquema. Rara vez, sin embargo, la compensación es completa de inmediato, y una compensación incompleta da lugar al surgimiento de *contradicciones.*

Desde un punto de vista muy general, Piaget mostrará que en los tres casos las desadaptaciones, los conflictos, las oposiciones, que desequilibran cada nivel de estructuración y que habrán de traducirse en *contradicciones,* responden a un único factor que él denomina "la compensación incompleta entre afirmaciones y negaciones".

Este tratamiento de la contradicción, al que dedica una obra que está en estos momentos en curso de impresión, traduce quizás mejor que ninguna otra el pensamiento dialéctico de Piaget. En él, como en Hegel y en Marx, la dialéctica aparece bajo dos formas distintas:

(i) Como una situación de *interacción*, en la cual se mantienen los términos en oposición, en un condicionamiento recíproco que hace que ninguno de ellos pueda ser definido o ser considerado independientemente del otro.
(ii) Como una situación en la cual uno de los dos términos en oposición niega (parcialmente) el otro, dando lugar a un tercer término o elemento que subsume (parcialmente) a los anteriores en una *síntesis.*

Las dos formas de la dialéctica —como acción recíproca y como síntesis de los elementos en contradicción— aparecen claramente en la teoría piagetiana de la equilibración: la primera de ellas, en las interacciones propias de cada forma de equilibrio; la segunda, en la superación de las contradicciones para dar lugar a nuevos niveles de estructuración.

III

Piaget publica esta *Introduction à l'épistémologie génétique* en 1950, y cinco años más tarde logrará hacer realidad un proyecto largamente acariciado: la creación del Centro Internacional de Epistemología Genética. La concepción epistemológica de Piaget exige el trabajo en común de científicos provenientes de distintas disciplinas: lógicos, matemáticos, historiadores de la ciencia, biólogos, especialistas en cibernética, psicólogos, físicos (para no citar sino las especialidades que han estado efectivamente representadas en los años de funcionamiento del Centro). Los únicos ausentes

son los filósofos especulativos (aquellos definidos por el lógico Grize, con razón y agudeza, de la siguiente manera: "Un filósofo es aquel que habla con autoridad de aquellos que tienen la reputación de ser filósofos"). Acerca de su concepción sobre los filósofos y la filosofía Piaget se explaya largamente en un libro singular: *Sabiduría e ilusiones de la filosofía*, al que remitimos al lector. Se trata de un libro aparte en la obra piagetiana en razón de su estilo: contrariamente a lo que ocurre en el resto de sus obras, Piaget se explaya aquí libremente, mezclando confesiones autobiográficas y anécdotas en un texto polémico donde los dardos y el humor alternan con el análisis riguroso.

Los resultados de los trabajos del Centro Internacional de Epistemología Genética (que mantiene desde su creación la tradición de un Simposium anual en el que se presentan y discuten los resultados de cada año de labor) comenzaron a publicarse en 1957 en una colección intitulada "Estudios de Epistemología Genética" (editada por Presses Universitaires de France), colección que ya cuenta con treinta volúmenes publicados. Ninguno de ellos está firmado exclusivamente por Piaget, que ha querido así marcar claramente el carácter interdisciplinario de la obra del Centro. Los seis últimos volúmenes están dedicados a problemas centrales de la epistemología de la física, que constituyen un complemento indispensable al tomo II de esta *Introducción*, en tanto que los primeros volúmenes de la colección están dedicados fundamentalmente a problemas vinculados con la epistemología del conocimiento lógico-matemático (abordados en el tomo I de esta *Introducción*).

Aquí es útil hacer la siguiente observación: cuando Piaget escribe el tomo I de esta *Introducción*, tiene ya suficientes datos experimentales sobre la génesis de las estructuras lógicas elementales que le permiten dar el sustento empírico genético a la posición adoptada (para entonces ya han sido realizados sus descubrimientos fundamentales acerca de la construcción progresiva de las nociones elementales de conservación: invariancia numérica, sustancia, longitudes, permanencia del objeto, etc.). Para la misma época, el sustento empírico genético relativo al tomo II (*El pensamiento físico*) se reducía a la génesis de nociones de tiempo, movimiento y velocidad, a las nociones de conservación de peso y volumen y a datos obtenidos en sus primeras investigaciones sobre la causalidad física con una técnica puramente verbal, posteriormente descartada. Los últimos años de trabajo del Centro Internacional de Epistemología Genética permiten aportar la masa de datos experimentales relativos a la génesis psicológica que faltaban entonces, y contribuyen a reelaborar la noción de causalidad y las explicaciones causales. Finalmente, el tomo III es producto de una reflexión sistemática sobre la biología, la psicología y la sociología. Esta reflexión está guiada por el método histórico-crítico pero no es completada por ninguno de los otros dos métodos. En particular, tanto en el momento de escribir su *Introducción* como en el presente, no hay datos experimentales que permitan sustentar una epistemología de la biología o de las ciencias humanas. El lugar de este tercer tomo (exceptuadas las conclusiones generales con las que culmina la obra) es, pues, muy particular puesto que aún

no hay una epistemología genética de las ciencias humanas. Por otra parte, Piaget mismo ha reelaborado el contenido de este tercer volumen en dos obras recientes: *Biologie et connaissance*[11] y una colección de tres ensayos publicados bajo el título *Epistémologie des sciences de l'homme* [Epistemología de las ciencias del hombre].[12] De estas dos obras, la primera es sin duda la más importante: allí Piaget retoma el proyecto original de sus años de adolescencia (construir una epistemología biológica) desde la perspectiva que le dan más de cuarenta años de dedicación al tema, y descubre en la biología de vanguardia, y muy particularmente en las ideas de Waddington, el punto de unión necesario con su concepción epistemológica. Es precisamente ese ensayo, excepcionalmente rico en ideas nuevas, de una originalidad indiscutible, el que se cierra con este párrafo: "La obra que se acaba de leer tiene todo tipo de defectos, de los cuales uno predomina: nada de lo que allí se dice está probado, y todo lo que se sugiere no son sino interpretaciones que se apoyan sobre los hechos, pero que van más allá de ellos sin cesar. Sin embargo hemos escrito este ensayo porque el tipo de colaboración entre biólogos, psicólogos y epistemólogos que tales pruebas supondrían, es prácticamente inexistente y es altamente deseable. Una epistemología científica sólo es posible por un trabajo interdisciplinario y esta cooperación es aún demasido escasa para responder a los problemas que se plantean".

Es en ese sentido que, a pesar de lo que podría hacer suponer el tercer tomo de esta *Introducción*, es preciso señalar que la epistemología genética de las ciencias humanas y de la biología no está elaborada. Este tercer volumen (conjuntamente con las obras posteriores que lo continúan) constituye un marco general, una primera aproximación al problema y una incitación al trabajo interdisciplinario que permitiría crear las condiciones de producción de esa epistemología. La obra de Piaget no se cierra sobre sí misma, sino que abre nuevos campos para la investigación epistemológica.

EMILIA FERREIRO
ROLANDO GARCÍA

[11] *Op. cit.* Véase además otra obra posterior: *Adaptation vitale et psychologie de l'intelligence.* París, Hermann, 1974.
[12] *Epistémologie des sciences de l'homme.* París, Gallimard, 1970.

PREFACIO

El hecho de que un psicólogo que ha consagrado cerca de quince obras al desarrollo de la inteligencia en el niño escriba una Epistemologia necesita algunas explicaciones a las que, por otra parte, resulta difícil dar una forma que no sea la de una confesión.

En la época en que estudiábamos zoología, un doble interés hacia los problemas de variación y adaptación y hacia las cuestiones lógicas y epistemológicas nos hizo soñar con la posibilidad de construir una epistemología biológica fundada exclusivamente en la idea del desarrollo. En aquella época se imponía recurrir a la psicología concreta y, ante todo, a esa embriología de la razón que es el estudio de la inteligencia en el niño. Nos iniciamos entonces con algunas investigaciones previas acerca de la lógica del niño, a las cuales teníamos pensado consagrar a lo sumo unos cinco años. Estos trabajos preliminares nos ocuparon durante treinta años y aún no están terminados...

Si bien tuvimos cuidado en no establecer generalizaciones demasiado rápidas, en cuanto a la constitución de esta epistemología genética cuyos lineamientos intentamos fijar hoy, jamás perdimos de vista tal objetivo. Nos esforzamos, especialmente, en conservar un contacto suficiente con la propia historia de las ciencias. Como afirmaba P. Janet, los cursos existen para que aparezcan en ellos aquellas cosas de las que aún no estamos seguros: el liberalismo intelectual de la facultad de Ciencias Generales de Ginebra y de E. Claparède que, en aquel entonces, enseñaba psicología experimental, nos permitió ocupar durante más de diez años una cátedra de historia del pensamiento científico. La presente obra es el resultado de una comparación, a la que nos consagramos constantemente, entre la psicogénesis de las operaciones intelectuales y su desenvolvimiento histórico.

Agradecemos ante todo a nuestros colegas de la facultad. Muchos problemas nos hubiera planteado mantener este proyecto sin las conversaciones continuas con representantes de las ciencias exactas que comprendían el punto de vista del psicólogo. Pensamos en particular en Ch.-Eug. Guye y luego en R. Wavre, J. Weigié y E. Stuckelberg, E. Guyénot, L. Féraud, A. Ammann, y también en M. Chavannes, asistente de matemática.

Falta aún decir algo más en cuanto a la composición de esta obra. Siempre nos encontramos atrapados entre dos escollos. Como escribíamos para los epistemólogos, no podíamos dar por supuesto que hubieran leído detalladamente nuestras investigaciones acerca de la psicología de la inteli-

gencia infantil y, por lo tanto, teníamos que resumir en cada punto lo esencial para asegurar la conexión con la discusión propiamente epistemológica. Sin embargo, por otra parte, como se trata de una obra que también se dirige a los psicólogos, había que evitar las frecuentes repeticiones de los datos empíricos. Por lo tanto, intentamos mantenernos en un término medio, como cuando se navega entre Caribdis y Escila, recurriendo entonces en particular al texto resumido y señalando los diversos puntos de referencias. Se nos ha planteado el mismo problema con respecto a las regiones limítrofes entre la presente obra y el Tratado de Lógica *que publicamos en otra parte*[1] *donde se encuentran los desarrollos logísticos que no podemos exponer aquí.*

En cuanto al plan de este ensayo, el presente tomo I, reservado al pensamiento matemático, será seguido por un tomo II sobre el pensamiento físico y por un tomo III donde se examinarán las principales formas del pensamiento científico en biología, psicología y sociología.

J. P.

[1] Colin, 1949.

INTRODUCCION

OBJETO Y METODOS DE LA EPISTEMOLOGIA GENETICA

Ya hace mucho tiempo que la psicología experimental, la sociología y la logística, o lógica algebraica, para hablar únicamente de las disciplinas que han proporcionado la mayor cantidad de trabajos colectivos, se han constituido como ciencias distintas, independientes de los análisis globales de la filosofía. Quisiéramos examinar en qué condiciones podría suceder lo mismo con la epistemología genética, o teoría del conocimiento científico fundada en el análisis del desarrollo de este conocimiento. Se trata de investigar si es posible aislar el objeto de esta disciplina y constituir métodos específicos adecuados para encontrar una solución a sus problemas particulares.

1. La epistemología genética considerada como una ciencia. El objeto de la filosofía es la totalidad de lo real, de la realidad exterior y del espíritu y de las relaciones entre ambos. Lo abarca todo pero sólo cuenta como método propio con el análisis reflexivo. Además, como tiene que examinar la totalidad de la realidad, los sistemas que construye engloban necesariamente tanto la evaluación como la verificación, y presentan tarde o temprano oposiciones irreductibles resultantes de la diversidad de los valores que se le proponen a la conciencia humana. De donde se explica la heterogeneidad de las grandes corrientes tradicionales que vuelven a aparecer periódicamente a lo largo de la historia de la metafísica.

Por el contrario, el objeto de una ciencia es limitado y sólo se inaugura como disciplina científica cuando alcanza esta delimitación. Persigue la solución de problemas particulares y construye entonces uno o varios métodos específicos que permiten reunir nuevos hechos y coordinar las interpretaciones en el interior del sector de investigación que previamente ha circunscripto. Las filosofías se enfrentan con las inevitables divergencias de evaluación que separan entre sí las concepciones globales que se refieren simultáneamente a la vida interior y al universo; en cambio, una ciencia alcanza un acuerdo relativo de los diversos puntos de vista, pero sólo lo alcanza en la medida en que solicita este acuerdo para la solución de problemas restringidos y mediante el empleo de métodos también bien definidos.

Si bien no existe frontera absoluta entre la filosofía y las ciencias, se

trata sin embargo de dos enfoques muy diferentes. No hay frontera absoluta entre ellas, porque una se refiere a la totalidad y la otra a los aspectos particulares de lo real. Por lo tanto, nunca puede decidirse a priori si un problema es de naturaleza científica o filosófica. En la práctica, y a posteriori, se comprueba que respecto de algunos puntos es posible lograr cierto acuerdo (por ejemplo, el cálculo de la probabilidad de un fenómeno, las leyes de la herencia o la estructura de una percepción), mientras que respecto de otros puntos este acuerdo resulta difícil (por ejemplo, la libertad humana). Se dirá, pues, que los primeros presentan un carácter científico y los segundos son de orden filosófico, pero con ello simplemente se quiere decir que se ha conseguido aislar los primeros problemas de tal modo que su solución no cuestione al conjunto, mientras que los segundos son solidarios de una sucesión indefinida de cuestiones previas que necesitan una toma de posición en cuanto a la totalidad de lo real. Se trata de una situación de hecho y sucede a menudo que un problema considerado tradicionalmente como filosófico se convierte en científico gracias a una nueva delimitación. Así sucedió con la mayor parte de los problemas psicológicos: hoy pueden estudiarse las leyes de la percepción y el desarrollo de la inteligencia, sin tener la obligación de tomar partido alguno en cuanto a la naturaleza del "alma".

Sin embargo, si bien no hay frontera fija alguna entre las cuestiones filosóficas y las científicas, se las aborda de manera esencialmente distinta. En el segundo caso, hay que esforzarse en abstraer del conjunto otros problemas; en cambio, en el primer caso, hay que relacionar todo con todo, sin que se sienta el deseo —ni siquiera el derecho— de practicar este tipo de cortes. Casi podría decirse, sin malicia alguna, que el filósofo es un teórico que está obligado a ocuparse y a hablar de todo al mismo tiempo; en cambio, el hombre de ciencia se restringe a seriar las cuestiones y se da así el tiempo necesario para encontrar un método particular para cada una de ellas.

Y aquí reside el nudo del problema. Cuando una disciplina como la psicología experimental se separa de la filosofía para erigirse como ciencia autónoma, esta decisión tomada por sus representantes no equivale al otorgamiento, en un momento dado, de una licencia de seriedad o valor superior. Simplemente consiste en renunciar a ciertas discusiones que crean divisiones y en comprometerse, por convención o *gentleman's agreement* a hablar únicamente de las cuestiones que pueden abordarse mediante el empleo exclusivo de ciertos métodos comunes o comunicables. Por lo tanto, en la constitución de una ciencia hay un necesario renunciamiento, una determinación de no mezclar más. en la exposición tan objetiva como posible de los resultados que se alcanzan o las explicaciones que se persiguen, aquellas preocupaciones. que quizá sean muy importantes para uno, pero que se aceptan dejar fuera de las fronteras trazadas. Y se obtiene así un acuerdo. incluso en el campo de la psicología experimental, por ejemplo, donde un problema de percepción habrá de tener iguales soluciones en Moscú, Lovaina o Chicago, independientemente de las filosofías muy diferentes de los investigadores que aplican métodos análogos de laboratorio.

Estos renunciamientos pueden aparecer, a lo largo de la constitución de una ciencia, como empobrecimientos; sin embargo, siempre gracias a estas delimitaciones ha progresado el saber humano. Toda la historia del pensamiento científico, la matemática, la astronomía y la física experimental —incluso la psicología moderna— es la historia de una progresiva escisión entre las ciencias particulares y la filosofía. Sin embargo, la filosofía ha encontrado a su vez sus renovaciones más fecundas en la reflexión acerca de los progresos realizados por las ciencias: Platón, Descartes, Leibnitz y Kant constituyen los mejores testimonios de esta situación.

Ahora bien, el problema de la delimitación se le plantea hoy a la epistemología misma, delimitación respecto de las síntesis filosóficas totales, por una parte, en función del progreso de algunos de sus métodos particulares y, por la otra, en función de la actual crisis de las relaciones entre las ciencias y la filosofía.

Si la diferenciación creciente de las disciplinas particulares tuvo para la ciencia los felices resultados que todos conocemos, culminó momentáneamente en la catastrófica consecuencia para la filosofía de dejar creer a gran cantidad de eminentes personas, que ya no pueden seguir detalladamente los trabajos especializados, que la reflexión filosófica constituye una especialidad más como cualquier otra. En las grandes épocas, eran los mismos hombres que trabajaban en la investigación cotidiana de su ciencia y que, en ciertos momentos, creaban las síntesis que han marcado las etapas esenciales de la historia de la filosofía; en cambio, hoy se cree que en las facultades universitarias desprovistas de laboratorios y enseñanza matemática, uno puede prepararse como filósofo, es decir, realizar síntesis sin previo trabajo especializado, o más precisamente hacer síntesis como si se tratase de una especialización legítima. Descartes, cuyo nombre nos evoca tanto a la filosofía como a la geometría analítica, aconsejaba entregarse a la reflexión filosófica únicamente un día por mes y dedicar los otros días a la experiencia o al cálculo. Ahora bien, hoy se tolera que se escriban libros de filosofía sin ni siquiera haber contribuido de algún modo al progreso de las ciencias, aunque sólo fuese mediante modestos descubrimientos efectuados para una tesis de doctorado y en una cualquiera de las disciplinas científicas.

El resultado más corriente de este tipo de división del trabajo —entre aquellos que hacen profesión de ocuparse de las cuestiones particulares y aquellos que creen poder consagrarse de entrada a la meditación acerca del conjunto de lo real— concuerda con la lógica de las cosas. Por una parte, nos encontramos con filósofos que hablan de *omni re scibili* como si fuera posible alcanzar toda verdad por la simple "reflexión": por ejemplo, juzgar acerca de la percepción sin haber medido nunca un umbral diferencial en un laboratorio, o bien discutir los resultados de las ciencias exactas sin conocer a través de la experiencia personal alguna técnica de precisión. Sin embargo, la historia nos demuestra bastante claramente que la discusión del trabajo de los otros sólo resulta fecunda cuando se ha proporcionado, aunque sea en un punto restringido, un esfuerzo efectivo análogo. Causa pesar observar cómo a menudo se desaprovecha el talento de tantos espíritus

profundos e ingeniosos, tanto más en la medida en que esas energías no se distribuyen mejor entre la investigación de los hechos y el análisis propiamente reflexivo, por la organización universitaria resultante del divorcio entre las ciencias y la filosofía. Si los filósofos hubiesen contribuido más al desarrollo de la psicología experimental, en sus aspectos más amplios y diversos, el conocimiento del espíritu humano se hubiera multiplicado; ahora bien, la pérdida del contacto con los laboratorios científicos conduce a los analistas más dotados a pensar que los hechos mentales pueden estudiarse sin abandonar la biblioteca o la mesa de trabajo.

Por otra parte y de acuerdo con la tradición secular de la filosofía resultante de la reflexión acerca de las ciencias, una cantidad siempre creciente de científicos especializados proporcionan los materiales de la epistemología contemporánea. Salvo una élite de filósofos que reaccionaron con el vigor que todos conocemos contra la simple especulación y se iniciaron en el camino de las ciencias, los matemáticos, los físicos y los biólogos son quienes hoy alimentan a menudo las más fecundas discusiones acerca de la naturaleza del pensamiento científico y del pensamiento a secas. Aun más, no confiados en el socorro que podían obtener de la filosofía académica, delimitaron, en el interior de un campo hasta entonces común a la epistemología filosófica y a las partes más generales de las ciencias, terrenos especiales de discusiones e investigación: por ejemplo el problema del fundamento de la matemática.

Entonces en muchos medios surge la siguiente pregunta: ¿la epistemología es necesariamente solidaria de una filosofía global, o se puede conseguir, en la medida en que con ello se obtenga cierta ventaja, aislar los problemas epistemológicos en forma tal que se contribuya a su solución independientemente de las posiciones metafísicas clásicas?

Toda filosofía presupone una epistemología, no hay duda alguna de que así sea: para abarcar simultáneamente el espíritu y el universo, es necesario fijar previamente cómo se relaciona uno de los términos con el otro y este problema constituye el objeto tradicional de la teoría del conocimiento. Sin embargo, la recíproca no es verdadera, salvo si uno decide instalarse de entrada en el conocimiento en general o en el conocimiento en sí; esta forma de plantear el problema la aceptamos sin pesar, e implica a la vez una filosofía del espíritu que conoce y una filosofía de la realidad que quiere conocerse.

Lo característico de las ciencias particulares consiste precisamente en no abordar nunca de frente las cuestiones que resultan demasiado ricas en implicaciones y en disociar las dificultades de tal manera que se las pueda ordenar. Una epistemología que se preocupe por ser científica, se cuidará muy bien de no preguntar de entrada qué es el conocimiento, así como la geometría evita decidir previamente qué es el espacio, la física rechaza investigar desde el principio qué es la materia, e incluso como la psicología renuncia a tomar partido, al comienzo, acerca de la naturaleza del espíritu.

En efecto, para las ciencias, no hay un conocimiento en general y ni siquiera un conocimiento científico a secas. Existen múltiples formas de conocimiento, y cada una presenta una cantidad indefinida de problemas

particulares. Incluso respecto de los grandes tipos de conocimientos científicos especializados, sería muy quimérico hoy pretender obtener una opinión única acerca de qué es, por ejemplo, el conocimiento matemático o incluso físico, o biológico, considerados cada uno en bloque.

En cambio, cuando se analiza un descubrimiento circunscripto cuya historia puede delinearse, o una idea distinta cuyo desarrollo puede reconstituirse, es posible que se logre una suficiente convergencia de los diversos puntos de vista en cuanto a la discusión de problemas que se plantean del siguiente modo: ¿cómo ha operado el pensamiento científico presente en los casos analizados (y considerados con una delimitación determinada) el tránsito de un estado de menor conocimiento a un estado de conocimiento que se estima superior?

En otras palabras, si bien la naturaleza del conocimiento científico en general es un problema aún filosófico porque necesariamente se relaciona con todos los problemas globales, resulta posible sin duda situarse *in medias res* y delimitar una serie de problemas concretos y particulares que se enuncian en forma plural: ¿cómo se incrementan los conocimientos? En este caso, la teoría de los mecanismos comunes a estos diversos incrementos, estudiados inductivamente como hechos empíricos que se suman con otros hechos, constituirá una disciplina que se esforzará estableciendo diferenciaciones sucesivas, en convertirse en científica.

Ahora bien, si tal es el objeto de la epistemología genética, resulta fácil comprobar lo adelantada que se encuentra esta investigación, gracias a una cantidad considerable de trabajos especializados, pero al mismo tiempo se comprobará lo frecuente que es, en la discusión de las cuestiones así formuladas, retornar, por una suerte de deslizamiento involuntario, a las tesis demasiado generales de la epistemología clásica. Se han de evitar dos peligros: las monografías históricas y psicológicas sin vínculo suficiente entre sí, y el retorno a la filosofía del conocimiento; estos peligros sólo podrán evitarse mediante la utilización de un método estricto.

2. El método genético en epistemología. Determinar cómo se incrementan los conocimientos implica que se adopte como método el considerar todo conocimiento bajo el ángulo de su desarrollo en el tiempo, es decir, como un proceso continuo cuyo comienzo o cuya finalización no puede alcanzarse nunca. En otras palabras, todo conocimiento debe enfocarse siempre, metodológicamente como siendo relativo a un estado anterior de menor conocimiento, y como susceptible de constitutirse a su vez en el estado anterior respecto de un conocimiento más profundo. Incluso una verdad llamada eterna, como $2 + 2 = 4$, puede interpretarse como una etapa genética porque, por una parte, se trata de un conocimiento que no todo sujeto pensante posee y conviene, en consecuencia, estudiar su formación a partir de conocimientos menores y, por otra parte, aun cuando sea definitiva (e independientemente de su propiedad de conocimiento "real" o de "sintaxis lógica", de convención, etc.), este conocimiento es susceptible de progresos ulteriores, que se insertan en sistemas operatorios cada vez más ricos y mejor formalizados: se intercala así un desarrollo extrema-

damente completo entre la comprobación empírica, realizada con un ábaco, de que $2 + 2 = 4$, o también entre la concepción pitagórica de la misma verdad, y aquello en lo que ella se ha convertido, por ejemplo, en los *Principia mathematica* de Russell y Whitehead.

En otros términos, el método genético equivale a estudiar los conocimientos en función de su construcción real, o psicológica, y en considerar todo conocimiento como siendo relativo a cierto nivel del mecanismo de esta construcción. Ahora bien y contrariamente a una opinión muy difundida, intentaremos mostrar que este método no prejuzga en cuanto a los resultados que alcanza, y que incluso es el único que presenta la garantía de esta no presuposición, siempre y cuando lleve el punto de vista genético hasta sus últimas consecuencias. Por lo general prevalece la opinión contraria, es decir que los epistemólogos sospechan a menudo que las consideraciones psicogenéticas conducen necesariamente a cierta clase de empirismo, cuando en realidad podría suceder también que culminen en conclusiones aprioristas, e incluso platónicas si así lo decidieran los hechos. Sin embargo, la razón de este prejuicio contra el método genético es el resultado del hecho de que algunas teorías célebres en la historia de las ideas —desde el evolucionismo de Spencer a las teorías más recientes de F. Enriques, por ejemplo— han permanecido en realidad a mitad de camino en la aplicación del método genético.

Antes de examinar las condiciones de objetividad del método, intentemos describirlo. Si los múltiples conocimientos que corresponden a las diversas ramas de la actividad científica son relativos a las construcciones vivas que deben estudiarse separadamente en su misma diversidad, y luego compararse entre sí después de haberlas analizado, hay que orientar esta doble búsqueda acostumbrándose a pensar no sólo psicológicamente sino también, y de algún modo, biológicamente.

Desde este punto de vista, todo conocimiento implica una estructura y un funcionamiento. El estudio de una estructura mental constituye una forma de anatomía y la comparación de las diversas estructuras puede asimilarse a algo así como una anatomía comparada. El análisis del funcionamiento corresponde, por otra parte, a una especie de fisiología y, en caso de funcionamientos comunes, a un tipo de fisiología general. Sin embargo, antes de penetrar en la fisiología general del espíritu, se presenta como tarea inmediata la anatomía comparada de las estructuras mentales.

Ahora bien, ¿cómo efectúa la anatomía comparada las determinaciones de los planes comunes de la organización, las "homologías" o parentescos genéticos de estructura, etc.? Hay dos métodos distintos que la orientan constantemente y que pueden combinarse entre sí. El primero consiste en seguir la filiación de las estructuras cuando su continuidad aparece de modo visible en los tipos adultos: así los miembros anteriores de los vertebrados pueden compararse de una clase a otra, desde las aletas anteriores de los pescados hasta las alas de los pájaros y las patas delanteras de los mamíferos. Cuando hay discontinuidad relativa, el "principio de las conexiones" de Geoffroy Saint-Hilaire permite determinar los órganos homólogos en

función de sus relaciones con los órganos vecinos. Pero estos métodos, fundados en el examen de las estructuras ya completas, están lejos de ser suficientes para colmar las necesidades de la comparación sistemática, porque hay filiaciones que escapan completamente al análisis por una carencia demasiado grande de continuidad visible. En este caso, se impone necesariamente un segundo método: se trata del método "embriológico" que consiste en extender la comparación a los estadios más elementales del desarrollo ontogenético. Así, algunos crustáceos cirrópodos fijos, como los anafites y los balanos fueron durante mucho tiempo considerados como moluscos, con lo cual toda determinación de las homologías resultaba errónea: bastó descubrir que pasan en estado larval por la forma "nauplio", semejante a un pequeño crustáceo libre, para relacionarlos con su verdadera filiación y restablecer las filiaciones y homologías naturales. Sólo el examen del desarrollo embrionario permite, por otra parte, determinar el origen mesodérmico o endodérmico de un órgano. Se pudieron determinar poco a poco ciertos parentescos poco visibles, como los que unen varios pequeños huesos del oído de los mamíferos con el arco hioideo de los peces, gracias al examen del desarrollo.

Ahora bien, para comparar entre sí diversas estructuras mentales, como sería el caso de las de los múltiples conceptos empleados en el pensamiento científico, es necesario pensar en métodos análogos, por más eminente que sea la dignidad de las estructuras intelectuales en oposición a las formas anatómicas de los crustáceos y los moluscos: en efecto, en ambos casos se trata de organizaciones vivas y en evolución.

Si seguimos, por una parte, el desarrollo de las ideas que se han empleado en una ciencia a lo largo de su historia, resulta fácil establecer algunas filiaciones por continuidad directa, o por la determinación del sistema de "conexiones" presentes. Puede reconstituirse así fácilmente la historia del concepto de número a partir de los enteros positivos y después de los números fraccionarios, los números negativos hasta las generalizaciones siempre más profundas resultantes de las operaciones iniciales. Será relativamente fácil, además, comparar entre sí las diversas formas de medición —del espacio, el tiempo, las múltiples cantidades físicas, etc.— y volver a encontrar en sus desenvolvimientos históricos respectivos algunas conexiones relativamente estables, como el establecimiento de relaciones entre objetos o movimientos postulados como invariantes y esquemas numéricos o emparentados con el número. Estas múltiples comparaciones, ampliadas en diversas escalas, caracterizan un primer método propio de la epistemología genética bien conocido en forma algo amplia y que requeriría quizás aún cierta sistematización: se trata del método "histórico-crítico" empleado con el éxito por todos conocido por toda una pléyade de historiadores del pensamiento científico y famosos epistemólogos.

Sin embargo, el método histórico-crítico no basta para todo. Limitado al campo de la historia de las ciencias, se refiere a las nociones construidas y empleadas por un pensamiento ya constituido: el de los científicos considerados desde la perspectiva de su filiación social. Las formas de pensa-

miento accesibles al método histórico-crítico ya están muy elaboradas y más o menos profundamente insertas en el juego de las interacciones propias a la cooperación científica. El inmenso servicio que brinda este método es el de vincular el presente con un pasado colmado de riquezas a menudo olvidadas, que lo esclarece y en parte explica gracias al examen de los estadios sucesivos del desarrollo de un pensamiento colectivo. Sin embargo, se trata siempre de la acción de pensamientos evolucionados respecto de otros que se encuentran en evolución y no todavía de la génesis como tal del conocimiento.

Por ello, es necesario añadir a este primer método que corresponde al de las filiaciones directas y las conexiones específicas de la anatomía comparada, un segundo método cuya función será la de constituir una embriología mental. Retomemos en este sentido la historia del concepto de número. De por sí esta historia es rica en enseñanzas singularmente reveladoras: cómo se introduce el número irracional para imitar el continuo espacial, cómo surgieron los números imaginarios a partir de una extensión generalizadora de las operaciones, cómo el transfinito pone de manifiesto ciertos tipos de correspondencia "refleja" [2] semejantes a las correspondencias lógicas, etc. Sin embargo, difícilmente se obtendrá, únicamente a partir de esta historia, una respuesta unívoca a la cuestión epistemológica central de saber si existe una intuición primitiva del número entero, irreductible a la lógica, o si el número es el resultado de operaciones más simples. La razón de este fracaso de la investigación histórico-crítica se encuentra seguramente en el hecho de que la estructura mental de aquellos que teorizan acerca del número es una estructura adulta, que se remonta de Cantor o Kronecker a Pitágoras mismo, mientras que la idea de cantidad apareció en ellos previamente a toda reflexión científica: por lo tanto, lo que hay que conocer es el estado larvario de la cantidad, es decir el estadio "nauplio" que explica al anafite adulto, y vemos que no resulta demasiado irreverente reclamar aquí la intervención de una embriología intelectual por analogía con los métodos de la anatomía comparada.

Ahora bien, esta embriología mental existe y precisamente son los matemáticos quienes adivinaron mejor y casi se anticiparon a su posible utilización cuando, por ejemplo, echaron los cimientos de una epistemología genética en el campo de la geometría. Todos recuerdan cómo Poincaré buscaba la génesis del espacio en la coordinación de los movimientos del cuerpo, en la distinción de los cambios de posición y los cambios de estados, etc., es decir, a través de muchas hipótesis que sólo pueden verificarse en el análisis del desarrollo mental del niño y además en su primera época de vida. Ahora bien, el método puede generalizarse y se trata entonces de la construcción de todos los conceptos esenciales, o categorías del pensamiento cuya génesis puede trazarse nuevamente en el transcurso de la evolución intelectual del sujeto, acaecida desde su nacimiento y el momento en que penetra en la edad adulta: esta embriología de la razón puede desempeñar, respecto de una epistemología genética, el mismo papel que

[2] Es decir tales que el todo corresponde a la parte.

la embriología del organismo respecto de la anatomía comparada o las teorías de la evolución.

Es cierto que el desarrollo del niño siempre se halla bajo la influencia del medio social que no sólo desempeña un papel de acelerador, sino que transmite además una multitud de ideas que tienen por su parte una historia colectiva. En la medida en que el sujeto en formación recibe así la herencia social de un pasado formado por las generaciones adultas anteriores, resulta claro que el método histórico-crítico, prolongado en método sociológico-crítico, retome entonces el control del método psicogenético. Pero ya no resulta tan claro que, aun cuando reciba ideas ya totalmente formadas por el medio social, el pequeño niño las transforme y asimile a sus estructuras mentales sucesivas, del mismo modo que asimila el medio formado por las cosas que lo rodean: estas formas de asimilación y su sucesión constituyen entonces un dato que la sociología y la historia no consiguen explicar, y es en el estudio de estos fenómenos que el método psicogenético controla a su vez al método histórico-crítico.

En suma, el método completo de la epistemología genética se constituye por la colaboración íntima entre los métodos histórico-crítico y psicogenético en virtud del siguiente principio, sin duda común al estudio de todos los desarrollos orgánicos: la naturaleza de una realidad viva no sólo se pone de manifiesto en sus estadios iniciales o en sus estadios finales, sino en el proceso de sus transformaciones. Los estadios iniciales, en efecto, sólo adquieren significación en función del estado de equilibrio hacia el que tienden, y, a su vez, el equilibrio logrado sólo puede comprenderse en función de las construcciones sucesivas que permitieron su aparición. En el caso de una idea o un conjunto de operaciones intelectuales, resulta entonces que no sólo importa el punto de partida, por otra parte siempre inaccesible a título de primer punto de salida, y el equilibrio final, del que tampoco se sabe nunca si es realmente final: lo importante es la ley de construcción, es decir el sistema operatorio en su constitución progresiva. Ahora bien, el método psicogenético es el único que proporciona el conocimiento de las etapas elementales de esta constitución progresiva, aun cuando jamás alcance la primera; en cambio, el método histórico-crítico es el único que proporciona el conocimiento de las etapas, a veces intermedias pero en todo caso superiores, aun cuando nunca posea la última: por lo tanto, sólo mediante una especie de juego de lanzadera entre la génesis y el equilibrio final (los términos génesis y fin simplemente son relativos entre sí y no se los presenta en sentido absoluto) puede tenerse la esperanza de alcanzar el secreto de la construcción de los conocimientos, es decir, de la elaboración del pensamiento científico.

Sin embargo, ¿no prejuzga acaso este método acerca de los resultados epistemológicos a los que conduce? Esto es lo que conviene examinar ahora, a través de la discusión de una epistemología reciente basada ella también, en la psicología (punto 3) y luego abordar de frente el problema en su generalidad (punto 4).

3. La epistemología psicológica de Enriques. Ya existen intentos semejantes a éste cuyo programa acabamos de formular y que permiten, en consecuencia, formarse ya alguna idea acerca de los éxitos y también acerca de las dificultades de este tipo de empresa. Exitos y dificultades son reales, pero de todas las dificultades queremos analizar de entrada una: el método, manipuleado de determinado modo, parece desembocar fatalmente si no en consecuencias empiristas, sí, al menos, en cierto realismo de la experiencia o en un positivismo cerrado sobre sí mismo. Ahora bien, el ejemplo de una teoría elaborada por un matemático de gran fama —F. Enriques— muestra que estas limitaciones son el resultado exclusivo de una psicología demasiado estrecha y, sin duda alguna, influida por una previa epistemología.

Como escribía F. Enriques en 1914: "Vemos desarrollarse una teoría del conocimiento científico que tiende a constituirse sobre una base sólida, como parte de la ciencia misma." (*Conceptos*,[3] pág. 3), y, en efecto, el objetivo esencial que se propone alcanzar este autor es construir una epistemología inferior a las ciencias como tales y que no tome proposición ni medio de investigación algunos fuera de las ciencias particulares. Este método lo guía, en consecuencia, a partir de la génesis psicológica: "pareciera que cada vez más se elimina lo arbitrario en la construcción científica de la génesis de los conceptos científicos, considerados no en su posibilidad lógica, sino en su desarrollo real" (*ibid.*, pág. 4). Ahora bien, el estudio de este desarrollo real permite dejar de lado "una concepción hoy anticuada, según la cual el científico se limitaría a registrar pasivamente los datos de la experiencia" (pág. 4). Por el contrario, "me consagré esencialmente a reconocer la función propia del espíritu creador de la ciencia" (pág. 3). Por lo tanto, Enriques ha abordado la experiencia, por una parte, pero también la actividad del sujeto: "El impulso de la experiencia combinado con la naturaleza del espíritu humano, parece explicar en sus rasgos generales el desenvolvimiento de la ciencia" (pág. 4); "el análisis que he emprendido me persuade de que en todas partes se encuentra presente un desarrollo psicológico cuyas razones íntimas se relacionan con la estructura misma del espíritu humano" (pág. 4).

Vemos que el programa de F. Enriques es idéntico al que nos inspira aquí. Sin embargo, este programa, que el célebre matemático creyó cumplir a comienzos de este siglo mediante las conscientes aplicaciones que proporcionó en todos los dominios esenciales —de la lógica y el análisis a la geometría, la mecánica, la termodinámica, la óptica, el electromagnetismo e incluso la biología— debe ser retomado hoy en su casi totalidad. ¿Estamos entonces ante el fracaso de la epistemología genética? Muy por el contrario; se trata del signo de un esfuerzo propiamente científico, puesto que las conclusiones que se obtuvieron han de revisarse constantemente, y han de beneficiarse al mismo tiempo con las investigaciones precedentes y puesto

[3] F. Enriques: *Les concepts fondamentaux de la science*. Trad. Rougier. París, Flammarion.

que los nuevos análisis pueden incorporar cierta adquisición a través de la reinterpretación de los resultados anteriores.

Ahora bien, la necesidad de esta revisión es el resultado, no sólo de los desarrollos imprevistos de la misma ciencia (como, por ejemplo, la microfísica) sino también y, en particular, de los progresos de la psicología experimental. El sistema de Enriques, fundado en su casi totalidad, en los conceptos de sensación, asociación de ideas y abstracción a partir de las cualidades sensibles, culmina fatalmente en una visión de las cosas de algún modo estática y cerrada sobre sí misma, de donde la impresión generada de estar ante un método que prejuzga en parte sus propios resultados. Sin embargo, si volvemos a situar estos mismos conceptos de sensación y asociación en el marco de la psicología contemporánea, que niega la existencia mental de las sensaciones y sólo reconoce las percepciones organizadas, que cuestiona la existencia de las asociaciones simples y, en particular, que reduce los estados de conciencia a su situación relativa respecto de las acciones y conductas de conjunto, y retomamos sobre estas nuevas bases el problema de la abstracción, la psicogénesis de los conceptos científicos aparecerá bajo una luz muy diferente.

Demos un primer ejemplo, sobre el que volveremos más extensamente acerca de los conceptos de la mecánica (vol. II, cap. I). Sabemos que la fuerza se define a menudo como "la causa de la aceleración", de donde la tendencia de algunos físicos a concebir la aceleración como constituyendo de por sí el hecho positivo, y el concepto de fuerza como redundante y confuso. Enriques responde (*Conceptos*, pág. 114) que esta concepción que se apoya en "sensaciones musculares de esfuerzo y presión" representa, por el contrario, un "hecho físico" auténtico: "La fuerza no tiene nada de misterioso o metafísico, no más que el movimiento o cualquier otro fenómeno cuya definición real se reduce siempre, en última instancia, a un grupo de sensaciones que se producen en ciertas condiciones voluntariamente provocadas". Desgraciadamente la "sensación de esfuerzo" es considerada hoy por muchos psicólogos (P. Janet, luego de Baldwin, etc.) como el simple índice de una acción, que precisamente constituye una conducta (o regulación) de aceleración de los propios movimientos. De este modo se concibe la causa física a través de una idea, cuya principal justificación consiste en el hecho de que corresponde a una "sensación", la cual no constituye a su vez sino la señal de una aceleración intencional...

Vemos adónde corre el riesgo de conducirnos un sistema de interpretación que tome como punto de partida la "sensación", concebida como fundamento del conocimiento. En su hermoso libro *La sensación, guía de la vida* (1945) que resume toda su obra abundante y precisa, H. Piéron afirma que la sensación sólo es, en todos los campos, un índice o una señal: "las sensaciones constituyen símbolos biológicos de las fuerzas exteriores que actúan sobre el organismo, pero que no pueden tener más semejanzas con estas fuerzas que las existentes entre estas sensaciones y las palabras que las designan en el sistema simbólico del lenguaje" (págs. 412-13). "Las ecuaciones relativistas que, en espacios de *n* dimensiones donde el tiempo se

encuentra integrado, simbolizan cadenas de acontecimientos, son más verdaderas que nuestras percepciones directas..." (pág. 413).

El punto de partida de una epistemología genética adaptada a los conocimientos psicológicos actuales ya no será entonces la sensación, ni la abstracción esquematizante a partir de las cualidades sensibles, sino que consistirá en considerar la acción en su totalidad, siendo los índices sensoriales únicamente uno de sus aspectos: a partir de la acción procede el pensamiento en su mecanismo esencial —el sistema de las operaciones lógicas y matemáticas— y, por lo tanto, el análisis de las acciones elementales y su interiorización o mentalización progresivas habrá de revelarnos el secreto de la génesis de estos conceptos.

Veamos otro ejemplo: en el terreno del espacio, Enriques se enfrenta, a propósito de la coordinación entre las sensaciones y los movimientos condicionados por las condiciones anátomo-fisiológicas, con "la pretensión de algunos filósofos neokantianos que ven el reflejo de estas condiciones estructurales... en algunos aspectos a priori de la intuición espacial, de modo tal que confieren a la geometría sus postulados desde el momento en que los conceptos fundamentales han sido proporcionados por las sensaciones" (pág. 44). Sin embargo, por más simplistas que parezcan hoy las explicaciones atacadas —de W. Wundt y de E. G. Heymans—, no por ello es menos cierto que la idea de Enriques de considerar las sensaciones generales de carácter táctil-muscular como la fuente de los conceptos topológicos, las sensaciones visuales como la fuente de las nociones proyectivas y las sensaciones táctiles como la fuente de las nociones euclidianas, requiere ella también un complemento en el sentido de las condiciones mismas de la coordinación: por ejemplo, ¿cómo puede surgir la idea fundamental del orden únicamente de la sensación, si no existiera la posibilidad de coordinar nuestros movimientos, aunque más no fuera percibiendo sucesivamente los elementos de una sucesión lineal en un mismo sentido? Por otra parte, una sucesión de percepciones no equivale en absoluto a la percepción de una sucesión, ya que ésta supone un acto propiamente dicho. Nuevamente aquí, la sensación es el índice de una asimilación mental del objeto a un esquema de acción y, en consecuencia, conviene remontarse a esta asimilación y a este esquematismo de la acción si quiere captarse el mecanismo psicogenético sin deformarlo por un realismo impuesto, por así decir, de antemano.

Vemos en qué sentido una psicología más funcional que la de Enriques puede conducir a una epistemología cuyos resultados no están implicados en el método genético mismo. En particular en el campo de la abstracción y la lógica en general es donde se produce esta diferencia entre la posición psicológica de los problemas epistemológicos a comienzos de este siglo y actualmente. En la primera parte de su gran obra, *Los problemas de la ciencia y la lógica*, Enriques muestra en qué sentido "la lógica puede considerarse como formando parte de la psicología" (pág. 159): "las defini-

ciones y deducciones, que forman el desarrollo de toda teoría deben concebirse, según nuestro punto de vista, como *operaciones psicológicas*; designaremos estas últimas en su conjunto con la expresión *proceso lógico*. Se plantea entonces el problema de *explicar psicológicamente* el proceso lógico" (pág. 177). No podría enunciarse de mejor forma la cuestión que pensamos sigue ocupando el centro de la epistemología genética actual. Sin embargo, ¿por qué no la resolvió Enriques? Porque su solución, al mismo tiempo que se acerca constantemente a ideas descubiertas posteriormente, sigue estando en realidad alejada todavía de una génesis real.

En efecto, ¿en qué consisten para él las operaciones psicológicas que forman la lógica? "Las *asociaciones* y *disociaciones* psicológicas que caen en el dominio de la conciencia clara y la voluntad forman las *operaciones lógicas fundamentales* y permiten crear nuevos objetos del pensamiento distintos de los dados" (pág. 178). Sin duda, pero antes de conseguir asociar y disociar clara y voluntariamente, se trata justamente de construir este poder: ahora bien, Enriques parece creer que una vez dados los objetos gracias a la sensación, las "asociaciones" y "disociaciones" psicológicas aparecen sin más y permiten ordenarlos en series, reunirlos en clases, construir correspondencias, invertir el orden, etc. (pág. 178). Pero para ello señala una condición: que estos objetos satisfagan "en ciertas *condiciones de invariabilidad* que luego veremos expresadas por los principios lógicos" (pág. 179). En efecto, "en su conjunto los principios confieren a los objetos del pensamiento una realidad psicológica independiente del tiempo y forman así las premisas de una lógica simbólica cuyo fin consistiría en representar como un conjunto de *relaciones actuales* el proceso *genético* de las operaciones lógicas" (pág. 188). Sin embargo, "para que la representación sea adecuada, será necesario que los axiomas que expresan las leyes de las asociaciones lógicas encuentren su equivalente en la realidad" (pág. 211). Ahora bien, "bajo la condición de invariabilidad expresada por los principios lógicos, los conjuntos de objetos satisfacen las propiedades enunciadas por los axiomas" (pág. 212); la lógica constituiría así, además del sistema de las asociaciones y disociaciones psicológicas, lo que Gonseth llamará más tarde una "física de cualquier objeto". Asimismo, "la suposición fundamental de la aritmética, antes de recurrir a una realidad física, puede apoyarse en una realidad psicológica, es decir, en el hecho de que algunos actos del pensamiento pueden repetirse indefinidamente subordinándose a determinaciones generales, de modo tal que se construyan series que satisfagan las condiciones (expresadas por los axiomas de Peano para la numeración) ... por *el principio de inducción matemática* entendido como una *propiedad fundamental* de las *series psicológicamente construidas*" (pág. 196).

Para terminar, señalemos que Enriques también percibió el problema biológico que presenta la existencia de la lógica y la matemática, correspondiendo el empirismo a las teorías "epigenéticas" (lamarckismo, etc.) y el apriorismo al preformismo. Enriques se orienta él mismo hacia el epigenetismo y explica las asociaciones y disociaciones psicológicas funda-

mentales —fuentes de la lógica y la aritmética— por los procesos de las vías nerviosas y la constancia de las vías de asociación (pág. 248).

Sin entrar a detallar estas diversas tesis, resulta sin embargo importante mostrar en qué sentido no comprometen para nada el porvenir de la epistemología genética, ni resultan suficientes para solidarizar, de una vez por todas, la explicación psicológica o biológica con las interpretaciones empiristas del conocimiento. El gran problema de toda epistemología, pero principalmente de toda epistemología genética, consiste en efecto en comprender cómo logra construir el espíritu las relaciones necesarias, que aparecen como siendo "independientes del tiempo", si los instrumentos del pensamiento sólo son operaciones psicológicas sujetas a evolución y que van constituyéndose en el tiempo. Ahora bien, una simple psicología de las sensaciones y las asociaciones es incapaz a tal punto de dar cuenta de este pasaje que Enriques se ve obligado, para estabilizar las "asociaciones" y "disociaciones" destinadas sin embargo a explicarlo todo, a recurrir a la ayuda de una apelación a los principios de la lógica, los únicos capaces de hacer que los objetos del pensamiento se vuelvan "invariables". Sin embargo, según una interpretación psicológica, los principios lógicos deberían también ser objetos de explicación, en vez de surgir bruscamente *ex machina*, y su acción estabilizadora constituye como tal un problema esencial del funcionamiento mental que no puede resolverse con la simple comprobación del hecho. Precisamente respecto de este punto una psicología de la acción muestra muchas ventajas sobre una psicología de la sensación: la ley fundamental que parece regir la mentalización progresiva de la acción es, en efecto, la del pasaje de la irreversibilidad a la reversibilidad, en otras palabras de la marcha hacia un equilibrio progresivo definido por esta última. En cambio, los hábitos y las percepciones elementales tienen esencialmente un sentido único, la inteligencia sensoriomotriz (o preverbal) ya descubre las conductas de rodeo y retorno que anuncian en parte la asociatividad y la reversibilidad de las operaciones. En el plano de las acciones interiorizadas en representaciones intuitivas, el niño comienza nuevamente por no saber invertir las concepciones imaginadas, a través de las cuales piensa; en cambio, las articulaciones progresivas de la intuición generan luego una reversibilidad creciente que, alrededor de los 7-8 años, culmina en las primeras operaciones lógicas concretas: aquellas que consisten, en efecto, en las acciones de reunir, seriar, etc., que se han vuelto reversibles en el transcurso de una larga evolución. Sin embargo, esta evolución sólo culminará alrededor de los 11-12 años, cuando las acciones que se han hecho reversibles, puedan traducirse en forma de proposiciones, es decir, como operaciones puramente simbólicas. Entonces, y solamente entonces, y gracias a la reversibilidad operatoria por fin generalizada, el pensamiento se liberará de la irreversibilidad de los acontecimientos temporales. Pero ella sólo puede explicarse a condición de reemplazar el lenguaje de las asociaciones entre sensaciones por el de las acciones y operaciones reversibles.

Aclarado esto, la cuestión epistemológica central que presenta el hecho

de recurrir a la psicología es, sin duda alguna, la de la génesis de las operaciones, incluidas su estabilización lógica, fuente y no efecto de los principios formales. Pero esta génesis, que es a la vez función de la actividad del sujeto y de la experiencia, presenta problemas de diversa complejidad que si se tratara de simples asociaciones de ideas, precisamente porque la reversibilidad operatoria no puede abstraerse sin más de los datos sensibles o experimentales, pocas veces revertibles (*renversables*) y siempre irreversibles hablando con propiedad (según el vocabulario utilizado por P. Duhem). El resultado de las investigaciones psicológicas sigue en este sentido enteramente "abierto" y puede culminar —según que predominen los hechos de maduración endógena, de adquisición en función del medio o de construcción regulada por leyes de equilibrio— tanto en soluciones apricristas como en soluciones empiristas, o en un relativismo que torne indisociable la parte del sujeto y la del objeto en la elaboración de los conocimientos.

Aun más, el problema psicológico así planteado por el desarrollo operatorio del pensamiento descansa, en definitiva, en un conjunto de cuestiones biológicas sin duda más complejas que las que F. Enriques tuvo el mérito de entrever el alcance que les correspondía. En efecto, no hay duda de que si no es exclusivamente por abstracción a partir de los datos exteriores cómo aumenta el conocimiento, y en particular en el campo de las operaciones lógicas y matemáticas, entonces es necesario prever la existencia de una abstracción a partir de las coordinaciones internas: ello no significa necesariamente que las operaciones estén preformadas por una forma innata, sino que puede interpretarse en el sentido de una abstracción progresiva de elementos tomados en parte de un funcionamiento hereditario y reagrupados gracias a nuevas composiciones constructivas. Sea cual fuere la posible diversidad de estas soluciones, el problema psicogenético del conocimiento penetra entonces hasta los mecanismos de la adaptación biológica: ahora bien, se sabe hasta qué punto esta cuestión permanece también "abierta" y actualmente todas las interpretaciones entre el preformismo, el mutacionismo, la emergencia, el neolamarckismo, etc., tienen su representación. En resumen, ya se formule el problema del conocimiento en términos biológicos de relaciones entre el organismo y el medio, o bien en términos psicológicos de relaciones entre la actividad operatoria del sujeto y la experiencia, tenemos menos soluciones en 1949 que en 1906 y ello muestra cuán poco prejuzgan los métodos genéticos acerca de sus propios resultados.

4. Las diversas interpretaciones epistemológicas y el análisis genético. Sin embargo, cabe pensar que el método genético prejuzga al menos respecto de uno de los puntos de las soluciones epistemológicas que pretende descubrir: la presuposición de que existe una génesis. Ahora bien, para el platonismo, el idealismo apriorista y la fenomenología, no hay génesis real, en el sentido de que la naturaleza de los instrumentos de conocimiento es diferente de su desarrollo psicológico. Por el contrario, nosotros vamos a intentar mostrar que, incluso ante las soluciones más

radicalmente antigenéticas, el método genético —en tanto método— no presupone en absoluto lo bien o mal fundado de estas soluciones y, por el contrario, podría servir para verificarlas, admitiendo que ellas se adecuen a los hechos.

En este sentido, intentemos clasificar las posibles soluciones epistemológicas, de modo tal que se perciba que cada una, no sólo no resulta contradictoria con el empleo de un método genético de investigación, sino que además se la podría verificar mediante este método en la medida en que sólo se propone establecer la manera en que se incrementan los conocimientos.

En primer lugar, es necesario distinguir las hipótesis que consideran los conocimientos como alcanzando verdades permanentes, independientes de toda construcción, y aquellas que hacen del conocimiento una construction progresiva de lo verdadero. Entre las primeras, puede ponerse el acento sobre el objeto, captado por el sujeto como proveniente desde el exterior y sin actividad propia de este sujeto: las ideas existen en sí mismas, como universales que subsisten de modo trascendente o inmanente a las cosas (platonismo o realismo aristotélico). El acento puede, por el contrario, colocarse en el sujeto, que proyecta entonces sus marcos a priori sobre la realidad: por lo tanto, esta realidad no es nunca totalmente exterior a la actividad subjetiva, de donde las formas diversas del idealismo en función de las múltiples combinaciones posibles entre esta interioridad y exterioridad. En tercer lugar, sujeto y objeto pueden concebirse como indisociables, lo verdadero se aprehende directamente por una intuición (racional o no y en diversos grados) que se ejerce sobre estas estructuras inmediatas e indiferenciadas: éste es el principio de la fenomenología. En cuanto a las concepciones según las cuales el conocimiento efectivamente se construye, se encuentra igualmente la primacía del objeto que se imprime sobre un sujeto pasivo (empirismo), la primacía del sujeto que modela lo real en función de su actividad (pragmatismo o convencionalismo según que esta actividad englobe necesidades variadas o se limite a la pura construcción intelectual) y la relación indisociable entre los dos (relativismo):

	Soluciones no genéticas	*Soluciones genéticas*
Primacía del objeto	Realismo	Empirismo
Primacía del sujeto	Apriorismo	Pragmatismo y convencionalismo
Indisociación entre sujeto y objeto .	Fenomenología	Relativismo

Observemos ahora que cada una de estas seis soluciones, consideradas en bloque, incluidas aquellas que llamamos genéticas, no pueden pretender constituirse como otra cosa que no sea una solución límite, legítima al término (quizás inaccesible) de las investigaciones, pero que necesita un cierto temperamento en cuanto a las cuestiones particulares. Cuando uno se pregunta, junto con la epistemología metafísica, qué es el conocimiento en sí mismo, o la relación entre un sujeto dado una vez por todas y un

objeto (real o representado) igualmente definitivo, entonces el apriorismo, el empirismo, etc., adquieren una significación detenida y masiva. Si el problema consiste en averiguar cómo se incrementan los conocimientos, es necesario por el contrario distinguir las interpretaciones relativas a las adquisiciones noéticas particulares y las mismas interpretaciones generalizadas para el incremento de todos los conocimientos. Desde el primero de estos dos puntos de vista —el de la epistemología genética en sus investigaciones sucesivas y en su método—, las soluciones llamadas genéticas no se imponen de antemano más que las otras: en tanto implican un pasaje son, en efecto, tan prematuras como las soluciones no genéticas; por otra parte, en lo que atañe a la adquisición o incremento de los conocimientos particulares, cada una de las seis soluciones podría ser verdadera en tal o cual sector delimitado (por ejemplo, el platonismo para el conocimiento matemático; el empirismo para el conocimiento biológico, etc.). Desde el segundo punto de vista —el de las conclusiones generales de la epistemología genética (suponiendo que logre un acuerdo suficiente sobre el conjunto de los conocimientos estudiados)—, las hipótesis no genéticas siguen siendo a fortiori tan legítimas como las otras y no pueden eliminarse de antemano porque se contradigan con el método genético de investigación.

Así, pretendemos que el método genético de investigación propio de una epistemología que quiera seguir siendo científica puede conducir a una cualquiera de estas soluciones sin prejuzgar respecto de una de ellas en detrimento de las otras. El desarrollo mental del sujeto y el desarrollo histórico de las ciencias constituyen, en efecto, datos reales y cada una de las grandes soluciones de la epistemología filosófica se ve en la obligación de acomodarse a ellos y, en consecuencia, esa epistemología no puede considerar de antemano que estos datos son contradictorios con ella. Ahora bien, el método genético se limita a estudiar estos datos empíricos en tanto procesos de incremento de los conocimientos. Los dos únicos problemas en cuestión consisten en saber en qué consiste este aumento de conocimiento y qué puede extraerse de él respecto de la naturaleza misma de este conocimiento. En cuanto al primer punto, no puede dudarse acerca de la existencia de un desarrollo de los conocimientos, reconocido por todos, pero sigue en pie el saber en qué consiste el mecanismo íntimo del desarrollo de este incremento. En cuanto al segundo punto, convergen en él todas las posibles objeciones: ¿revela este mecanismo de aumento la naturaleza de los conocimientos mismos? El método genético postula, en este sentido, por una parte, que el mecanismo del desarrollo nos informa, en tanto pasaje de un menor a un mayor conocimiento, acerca de la estructura de los conocimientos sucesivos y, por la otra, que esta enseñanza, sin prejuzgar acerca de la naturaleza última del conocimiento en general, prepara sin embargo la solución de esta cuestión límite (aun cuando esta solución consista en reconocer en el camino que este límite no puede alcanzarse nunca). Ahora bien, la única manera de justificar estos dos postulados consiste precisamente en mostrar cómo cada una de las seis soluciones precedentes puede confirmarse o refutarse a través de los hechos empíricos de desarrollo.

En primer lugar, no hay nada que excluya una solución tal como la del platonismo o el realismo de los universales: incluso puede decirse, sin caer en paradoja alguna, que únicamente en función de un desarrollo una idea puede presentarse como subsistiendo en sí misma, independientemente de este desarrollo. Cuando un matemático afirma —como lo hace Hermite— la existencia, exterior a sí mismo, de seres abstractos como las funciones o los números, es fácil responder que esta creencia en la autonomía de estos seres no implica adición alguna de propiedad, salvo a título subjetivo y que ellos conservarían todas sus propiedades matemáticas si se interpretara su existencia de otra manera. Sin embargo si, al estudiar el problema del descubrimiento o la invención,[4] se consigue demostrar que después de una serie de aproximaciones que testimonian la actividad creadora del sujeto, éste descubre, por una intuición directa e independiente de las construcciones anteriores, una realidad sin historia, resulta claro que la creencia en las ideas "subsistentes" encontrará entonces una singular confirmación. Pero, vemos de entrada que esta verificación deberá ser a la vez psicológica e histórica: psicológica, demostrando la existencia de una intuición racional que consiga contemplar sin construir; e histórica, verificando el éxito creciente de esta contemplación, y no su debilitamiento a partir de un estadio determinado de creencia común. Ahora bien, volveremos a encontrar precisamente estos dos problemas, uno a propósito de las relaciones entre la "intuición racional" y la inteligencia operatoria y, el otro, a propósito de los trabajos de P. Boutroux acerca de la historia de las actitudes intelectuales sucesivas de los matemáticos (actitudes de las cuales veremos la relación que mantienen con la conciencia de las operaciones).

En cuanto al apriorismo, es evidente que si fuera verdadero, el estudio genético descubriría su buen fundamento sin salir del desarrollo como tal. En efecto, se reconocería un marco a priori sin dificultad alguna por el hecho de que no se construiría en relación con la experiencia, sino que se impondría en función de una maduración interna progresiva. Además, a esta maduración psicobiológica revelada por el análisis del comportamiento correspondería, desde el punto de vista mental, una toma de conciencia brusca o gradual, que procedería por reflexión del pensamiento sobre su propio mecanismo.

En cambio, pareciera que la fenomenología opone a la epistemología genética una serie de objeciones más radicales, ya que si bien el apriorismo kantiano ignora la construcción psicológica, admite en cambio una construcción previa a toda experiencia (y acabamos de ver que esta construcción manifestaría claramente su existencia durante el desarrollo). Ahora bien, la fenomenología cuestiona esta construcción a priori y la reemplaza por una intuición racional de las esencias, sin dualismo alguno entre el sujeto que contempla y el objeto exterior, sino con una indiferenciación radical entre ambos términos fundidos en la misma toma de posesión inmediata. Por lo tanto, importa mostrar más detalladamente, en cuanto a este tercer grupo

[4] Véase R. Wavre: *L'imagination du réel*. Neuchâtel. Coll. Être et penser. 1948.

de soluciones, que el empleo del método genético no implica para nada su previa refutación y, por el contrario, las confirmaría si ello fuera necesario.

La primera tesis esencial de la fenomenología es aquella desarrollada por Husserl en sus *Logische Untersuchungen*: la verdad es de orden normativo y no proviene de la simple comprobación de los hechos. El error del "psicologismo" consiste, por el contrario, en proceder indebidamente del hecho a la norma, mientras que la norma, en tanto obligación independiente de sus realizaciones, sólo puede provenir de sí misma. Por otra parte, esta afirmación no es específica de la fenomenología, se la encuentra en todos aquellos casos en que un "normativismo" se opone a una ciencia "natural", y los conflictos de la lógica y la psicología son, en este sentido, paralelos a los del "derecho puro" y la sociología, etc. Sin embargo, lejos de constituir un obstáculo al empleo de los métodos de la epistemología genética, la existencia de las normas presenta, por el contrario, problemas de gran importancia desde el punto de vista del desarrollo. Es necesario distinguir aquí dos problemas: el de las relaciones entre la norma y el hecho, y el de la génesis de las normas. Sobre el primer punto, es fácil entenderse. Una norma es una obligación, y es claro que no se obtiene una obligación a partir de una comprobación. Sin embargo, mientras que la conciencia que encarna la norma (la conciencia del lógico, la conciencia del hombre de ciencia, etc.) legisla o aplica la norma, y no habla, por lo tanto, el lenguaje de los hechos sino el de la verdad normativa, el genético, que se atiene a los hechos empíricos que todos pueden controlar, comprueba, sin tomar partido alguno en pro o en contra de esta norma, la marca que impone sobre la conciencia que la encarna. Desde este punto de vista, la norma también es un hecho, es decir que su carácter normativo se traduce en una existencia experimentalmente comprobable, en los sentimientos de obligación u otros estados de conciencia *sui generis*: implicaciones sentidas como necesarias, etc. Un gran jurista, Pétrajitsky, propuso la excelente expresión de "hechos normativos" para designar precisamente estos hechos empíricos que permiten comprobar que tal sujeto se considera obligado por una norma (sea cual fuere la validez de ella desde el punto de vista del observador). Por lo tanto, puede describirse en término de hechos normativos todo el sistema de las normas, y si la tesis de la *Logische Untersuchungen* es verdadera seguro que se la puede verificar mediante una honesta investigación genética: ello no significa que el genético vaya entonces a legislar en lugar del lógico o de las conciencias que encarnan las normas, sino que describirá, en el lenguaje de los hechos, lo que comprueba en el comportamiento (interno o externo) inspirado por la creencia en estas normas. Aparece entonces el segundo punto: la génesis de las normas. Sin embargo, aquí nuevamente, si la tesis fenomenológica es verdadera no la puede contradecir el estudio del desarrollo. Ahora bien, este estudio no muestra jamás, en efecto, que una obligación derive de una comprobación, pero, sin embargo, nos coloca en presencia de una evolución de las normas: las del niño no pueden identificarse sin más con las del adulto, así como tampoco las normas del "primitivo" se reducen a priori a las del lógico fenomenólogo. El desarrollo de las normas presenta pues un

problema que hunde sus raíces en las fuentes de la acción y las relaciones elementales entre la conciencia y el organismo. Por lo tanto, colocar el estudio de los hechos normativos en el terreno del desarrollo de las operaciones, no equivale a excluir de antemano la solución fenomenológica; y el análisis de las relaciones entre la conciencia y el organismo no conducirá precisamente al reconocimiento de que, disociada de sus concomitantes fisiológicos, la conciencia constituya, tarde o temprano, sistemas de implicaciones cuya necesidad se distinga esencialmente de las relaciones de causalidad propias de la explicación de los hechos materiales.

Sin embargo, hay más en la fenomenología y en los "existencialismos" que de ella provienen que esta simple afirmación normativista. Está la idea de un conocimiento a la vez apriorista e intuitivista (en oposición a la construcción kantiana) de estructuras puras destinadas a caracterizar los diversos tipos de seres posibles. El objeto propio de la epistemología fenomenológica es, según Husserl, captar "adónde quiere llegar el pensamiento", es decir cuáles son sus "intenciones" independientemente de sus realizaciones. En este segundo punto es cuando los datos genéticos parecen ser más irreductibles a la realidad existencial, cuya "reducción" fenomenológica se adjudica el aprehender los caracteres por intermedio únicamente de la intuición reflexiva. Pero, aquí nuevamente, importa introducir las distinciones de diversos puntos de vista. En tanto filosofía sistemática y cerrada, que pretende alcanzar el conocimiento en sí mismo, la fenomenología permanece por supuesto fuera de los marcos de la epistemología genética que consiste, ante todo, en un método de investigación. Pero el estudio psicogenético e histórico del modo en que se incrementan los conocimientos no excluye en absoluto la culminación eventual en una solución fenomenológica. Sucede así que lo esencial de muchos procesos genéticos consiste en una orientación dirigida hacia ciertos estados de equilibrio: por lo tanto, no se excluye previamente que la "intención" de Husserl pueda encontrar alguna confirmación en el estudio de estas direcciones genéticas, aunque estas dos clases de conceptos no presenten en su punto de partida relación semejante alguna. Este punto de unión podría, en este sentido, ser el siguiente. Husserl concibe las "estructuras" como sistemas de puras posibilidades, anteriores a toda realización y descubiertas por la conciencia gracias a "actos" o intuiciones vividas durante la reflexión. Pero, por más metafísica que esta concepción sea, no está desprovista de toda relación con los problemas que encuentra el análisis genético respecto del desarrollo ni, en particular, con los que encuentra el análisis histórico respecto de las relaciones entre la matemática y la física. Husserl soñó, en efecto, después de Descartes, en una *mathesis universalis* que se referiría a todas las posibles "estructuras" y no sólo a la matemática. Ahora bien, el problema de las relaciones entre lo posible y lo real, no se reduce solamente, desde el punto de vista genético, a la cuestión de las relaciones entre la deducción y la experiencia, cuestión que domina ya por sí sola gran parte de la historia del pensamiento científico. Se encuentra en todas partes donde se plantea un problema de equilibrio, implicando este equilibrio la consideración del conjunto de las posibles transformaciones (como los "trabajos virtuales"

del famoso principio mecánico) y no sólo las condiciones realizadas. Así, el desarrollo embriológico aparece hoy como una elección dentro de un conjunto de formas potenciales mucho más ricas que las formas producidas realmente. Asimismo todo equilibrio mental (perceptual, operatorio, etc.) se apoya sobre un juego de posibilidades que supera cada vez más, durante el desarrollo intelectual, las acciones o movimientos reales. Por lo tanto, no se excluye que, algún día, los problemas genéticos de equilibrio se reúnan con las intuiciones de Husserl, lo cual no significa naturalmente que realmente así ha de suceder.

Por otra parte, la fenomenología ha generado una psicología experimental, una interpretación que todos conocemos acerca del desarrollo: la de la "teoría de la Gestalt", que reemplaza el concepto de construcción de las estructuras por el concepto de una abstracción progresiva de "formas" concebidas como dadas a la vez en el espíritu y en lo real. Esta concepción puede ampliarse a la epistemología en su totalidad y prueba así, por sí sola, que la fenomenología, si es verdadera, debe poder reconocerse como verdadera a través del examen de la génesis.

En cuanto a las interpretaciones del conocimiento que consisten en pensar el pensamiento como una construcción progresiva de lo verdadero, resulta evidente que el estudio genético pueda servirle como piedra de toque: efectivamente, el empirismo, el pragmatismo o el relativismo (por ejemplo, el relativismo brunschvicgiano) siempre se apoyaron en el estudio psicogenético o histórico-crítico para justificar sus tesis. Sin embargo en estos casos y nuevamente, se trata de doctrinas límites respecto de las cuales la epistemología genética no puede pronunciarse de antemano, sean cuales fueren las convergencias obtenidas en algunos de sus puntos. Esto es lo que hemos examinado detalladamente en el punto 3 a propósito del moderado empirismo de F. Enriques.

En efecto, así como las soluciones no genéticas, las interpretaciones del conocimiento que se basan en su desarrollo presentan, pero de modo mucho más agudo, el problema de las relaciones entre las normas y el desarrollo. Las soluciones no genéticas parten de la hipótesis de que la verdad se apoya en normas permanentes que pueden localizarse en la realidad, en las estructuras a priori del sujeto o en sus intuiciones inmediatas y vividas. El desarrollo mental o histórico, tal como lo describe la epistemología genética, será concebido entonces por las teorías no genéticas como la actualización de una virtualidad determinada de antemano por estas mismas normas: el análisis de las transformaciones mentales o históricas del saber terminará por establecer si esta hipótesis es exacta, así como acabamos de comprobarlo. Pero si el estudio del incremento de los conocimientos confirma una de las tres soluciones genéticas, es decir, atribuye este aumento a la presión de las cosas, a las felices convenciones del sujeto o a las interacciones entre sujeto y objeto, ¿cómo conseguirá este análisis del desarrollo proceder del hecho a la norma y más precisamente del desarrollo que caracteriza la construcción de los conceptos a la inmutabilidad de las conexiones lógicas? El problema ya no consistirá entonces en encontrar la norma fija en el interior de la evolución, sino en generar la norma mediante los datos móviles

del desarrollo. Ahora bien, esta posición del problema, por más quimérica que pueda parecer, no por ello deja de corresponder al aspecto cotidiano de la ciencia contemporánea: nunca el contenido de los conceptos ha sido más móvil que actualmente y, sin embargo, nunca se ha renunciado a encontrar un fundamento lógico y deductivo de estos mismos conceptos. El problema de la unión entre el desarrollo mental y la norma permanente, o entre la exigencia de revisión continua y la necesidad —artificial o realmente fundada— de apoyarse en alguna estabilidad normativa se encuentra pues en el centro del método específico de la epistemología genética.

5. Desarrollo mental y permanencia normativa. Las relaciones entre el hecho psicológico del desarrollo y la norma lógica intemporal están dominadas por dos problemas que las teorías no genéticas y genéticas, precedentemente mencionadas, resuelven en sentidos opuestos: el de la acción y el pensamiento y el de lo real y lo posible.

Todas las teorías no genéticas (y, por otra parte, situación curiosa, también algunas teorías genéticas como las formas clásicas del empirismo, etc.) conciben el pensamiento como siendo anterior a la acción y a la acción como una aplicación del pensamiento. De ahí que, la mayor parte de las teorías metafísicas del conocimiento, presenten una concepción puramente contemplativa de las normas, apoyadas en una verdad divina, trascendental o inmediatamente intuitiva. Esta interpretación contemplativa de la norma se encuentra, por otra parte, en muchas corrientes epistemológicas que, sustituyendo las diversas formas de realismo por un nominalismo sintáctico, no prestan cuidado suficiente al carácter activo del lenguaje, que consiste en establecer correspondencias entre las operaciones de los diversos sujetos antes de poder enunciar verdades incondicionalmente válidas. Desde el punto de vista del análisis genético, por el contrario, la acción precede al pensamiento y el pensamiento consiste en una composición siempre más rica y coherente de las operaciones que prolongan las acciones interiorizándolas. Desde este punto de vista, las normas de verdad expresan pues, en primer lugar, la eficacia de las acciones, individuales y socializadas, para luego traducir la de las operaciones y sólo por último la coherencia del pensamiento formal. Sin prejuzgar acerca del carácter —contemplativo u optratorio— de las normas que han alcanzado sus formas superiores de equilibrio, el método genético escapa así, desde el comienzo, a que se le reproche el ignorar lo normativo, puesto que desde la acción efectiva a las operaciones más formalizadas, sigue paso a paso la constitución de normas constantemente renovadas.

Sin embargo, la relación entre acción y pensamiento sólo representa uno de los aspectos de un conflicto mucho más profundo que opone lo genético a lo no genético y que interesa más directamente para las relaciones del desarrollo temporal y la lógica intemporal. En efecto, el carácter esencial de las teorías no genéticas consiste sin duda en explicar lo real —el conocimiento o la operación reales— mediante un posible que le sería anterior. Así, el realismo de los universales es solidario, en Aristóteles,

con la concepción fundamental del pasaje de la potencia al acto. Por su parte el apriorismo supone la preformación del conocimiento real en un sistema predeterminado de esquemas virtuales. La fenomenología de Husserl subordina este mismo conocimiento actual a la intuición de las posibles "intenciones". En resumen, la actitud antigenética equivale siempre a situar una virtualidad preformadora en el punto de partida del conocimiento actual. Ahora bien, lo específico del método genético consiste, por el contrario, en considerar lo virtual, o lo posible, como una continua creación perseguida por la acción actual y real: toda nueva acción, al mismo tiempo que realiza una de las posibilidades generadas por las acciones precedentes, inaugura a su vez un conjunto de posibilidades, hasta entonces inconcebibles. Entonces, la solución al problema central de la norma intemporal y el devenir genético debe buscarse en la relación entre lo real causal y las posibilidades que él inaugura, relacionadas entre sí por un vínculo de virtualidad siempre más próximo a la implicación lógica.

En efecto, toda acción formadora de una operación genera a través de su ejecución dos clases de virtualidades, es decir que "compromete" la actividad del sujeto e inaugura así dos categorías de nuevas posibilidades: por una parte, la posibilidad de repetición efectiva, o de reproducción en el pensamiento acompañada entonces por una determinación de los caracteres hasta entonces implícitos de la acción; por la otra, la posibilidad de nuevas composiciones, virtualmente provocadas por la ejecución de la acción inicial. Por ejemplo, tomemos una acción que consiste en un desplazamiento de A a B, concebida simplemente en su forma primitiva como un movimiento orientado hacia B. Esta acción genera, en primer lugar, la posibilidad de una reproducción material o mental; se añadirá, tarde o temprano en este caso, el descubrimiento del hecho de que al dirigirse hacia B el móvil se aleja de A; etc. De donde aparece un segundo conjunto de virtualidades: el desplazamiento AB puede invertirse en un desplazamiento BA, que se acerca a A y se aleja de B; asimismo los desplazamientos AB y BA pueden virtualmente componerse en un desplazamiento nulo que consiste en permanecer en A; etc. En resumen, la acción inicial genera, por el solo hecho de su realización, dos clases de posibilidades, es decir, de operaciones virtuales: unas consisten en poder repetir la acción ejecutada, descubriendo a qué conducía en su primera realización; las otras consisten en prolongarla a través de nuevas acciones nacidas de la inversión o la composición de esta acción con otras acciones.

Cada acción real, al mismo tiempo que constituye la actualización de posibilidades abiertas por anteriores acciones, inaugura pues posibilidades más amplias. Resulta que, por una razón de método, el análisis genético debe subordinar lo posible a lo real y no a la inversa. No puede postular lo virtual para explicar lo real antes de estar obligado a hacerlo porque se ha descubierto, en el pensamiento del mismo sujeto, algún procedimiento reflexivo que sitúa efectivamente lo real actual en un sistema de posibilidades reconstituidas. En cambio tiene la obligación de explicar lo virtual por lo real siempre que una nueva acción inaugura, por su ejecución, nuevas posibilidades y genera así un sistema de operaciones virtuales.

Ahora bien, si la acción efectiva es una realidad en desarrollo y constituye entonces un proceso genético o causal, el mundo de las posibilidades inauguradas constantemente por la acción ofrece, en cambio, ese notable carácter de ser intemporal y corresponder esencialmente al orden de la implicación lógica. Más generalmente, la diferencia entre lo posible y lo real se asemeja a la diferencia que separa las relaciones lógico-matemáticas del desarrollo psicológico y físico: el problema de las relaciones entre la génesis histórica o mental y la verdad lógica, en su permanencia normativa, es esencialmente el resultado de las conexiones que se establecerán entre lo virtual y lo actual. Puesto que el universo lógico constituye el dominio de lo posible y la genesis expresa el desarrollo real, toda la cuestión de saber si el proceso genético refleja normas previas, o si permite explicar la constitución de las normas, se reduce entonces al problema de la actualización de lo virtual o de la creación de las posibilidades abiertas por la acción real

Vuelven a aparecer aquí necesariamente las nociones de equilibrio, lugar de la unión específica entre lo posible y lo real, y el concepto de reversibilidad, o pasaje *sui generis* del desarrollo físico o mental al intemporal lógico.

Se dice que un sistema mecánico se encuentra en equilibrio cuando el conjunto de los trabajos virtuales compatibles con las relaciones presentes (por lo tanto, los desplazamientos de las fuerzas están determinados por la estructura del sistema considerado) constituye un producto de composición cuyo valor es nulo, es decir, con compensación exacta de los + y los —. Decir que un sistema real se encuentra en equilibrio equivale así a concebir una composición entre los movimientos o trabajos virtuales: hablar de equilibrio implica, por lo tanto, insertar lo real en un conjunto de transformaciones, simplemente posibles. Sin embargo y recíprocamente, estas posibilidades están a su vez determinadas por los "vínculos" del sistema, es decir por lo real. Ahora bien, la situación es semejante en cualquier proceso genético que interese a la constitución de un sistema de operaciones intelectuales. Toda acción inaugura, como acabamos de ver, una serie de nuevas posibilidades. La acción culminará pues en la constitución de un estado de equilibrio, es decir generará un sistema de relaciones estables cuando el conjunto de las operaciones virtuales se compense exactamente: el equilibrio se definirá así por la reversibilidad, cuya significación psicológica es la posibilidad de invertir las acciones ejecutadas. Aquí, nuevamente, lo real y lo posible son interdependientes en cada estado de equilibrio.

Todo el estudio del desarrollo mental muestra la importancia de este mecanismo de equilibrio, caracterizado por la creciente reversibilidad de las acciones. En tanto una acción se realice en forma aislada y sin total reversibilidad, las relaciones por ella construidas no se encuentran en equilibrio, lo cual se pone de manifiesto por la ausencia de conservación racional. Por ejemplo, al reunir un conjunto de objetos A con otro conjunto A' para constituir el todo B, un niño pequeño empezará por no

comprender la conservación de las partes A y A', y tampoco la del todo B (pensará así que hay más —o menos— en el todo que en la suma de las partes separadas, etc.). Por el contrario, cuando la acción ejecutada (A + A' = B) aparece junto con la conciencia de todas las operaciones virtuales (por ejemplo, reuniendo A con A', se desprende A de otro todo: Z — A, etc.), y esencialmente de las operaciones inversas posibles (B — A = A'; B — A' = A; — A — A' = — B), el sistema de las composiciones virtuales culminará en un estado de equilibrio, que puede reconocerse por la conservación necesaria de las partes y las totalidades jerárquicas (necesidad lógica). El tránsito de la acción real a la conciencia de las posibles acciones constituye entonces la condición necesaria para la construcción de un sistema operatorio que culminará cuando se alcance la composición reversible. Así, todo proceso genético tiende hacia un estado de equilibrio móvil en el que intervienen los vínculos reales y las operaciones posibles en una totalidad indisociable.

Ahora bien, esta interdependencia entre lo real y lo posible, característica de cada estado de equilibrio, basta para explicar la unión entre el desarrollo mental y la permanencia lógica y normativa. En efecto, resulta claro que si las acciones reales están unidas entre sí por un determinismo causal y temporal, las transformaciones simplemente posibles, o las operaciones virtuales, son intemporales y no corresponden entonces al orden de la implicación lógica. Reunir A con A' en la forma A + A' = B o disociar A de B en la forma B — A = A' son dos acciones que pueden ejecutarse realmente a condición de que sean sucesivas; pero componer + A — A = O, es reunir en un solo todo virtual estas operaciones sucesivas y, en consecuencia, penetrar en lo intemporal. La reversibilidad, que transforma las acciones en operaciones, presenta así el carácter específico de la inteligencia e ignorado por la acción real, de remontar el curso del tiempo y liberarse de él para alcanzar la implicación lógica pura. Resulta entonces que, cuanto más extiende la acción real el círculo de las operaciones posibles más densa es la red de relaciones virtuales obtenidas —es decir las relaciones lógicas— que ella va formando para insertarse allí cada vez más profundamente.

Tanto el estudio de las relaciones entre la acción y el pensamiento como el estudio de las conexiones entre lo real y lo posible conducen pues a concluir que resulta vano oponer a priori lo genético y lo lógico (en tanto normativo). Todo proceso genético culmina en un equilibrio que se encuentra con lo normativo, por el hecho de que la reversibilidad creciente de las acciones temporales corresponde a las operaciones directas e inversas que caracterizan los vínculos lógicos fundamentales (afirmación o negación, etc.). Al fin de cuenta, ya sea que lo lógico funde lo genético porque lo posible precede a lo real o que lo genético se realiza en lo lógico porque el equilibrio de las acciones reales constituye una organización de las operaciones virtuales, el análisis genético se encuentra, en ambos casos y tarde o temprano, con lo intemporal lógico y normativo, sin prejuzgar acerca de su posición efectiva en la constitución y el conocimiento. En

una palabra, siempre hay, genéticamente, tendencia al equilibrio, equilibrio que introduce lo posible en el seno de lo real: las normas se relacionan entonces con la eficacia de los sistemas de conjunto que abarcan todo lo posible, aunque estos sistemas hayan surgido de la acción concreta sobre lo real (o porque son reales).

6. Equilibrio y "límite". El círculo de las ciencias y las dos direcciones del pensamiento científico. Si suponemos, como acabamos de admitir, que toda serie genética tiende hacia ciertos estados de equilibrio que realizan la unión entre lo real temporal y lo lógico intemporal, aparece entonces un nuevo problema para el método genético: ¿puede considerarse que todo incremento de los conocimientos en la historia de las ciencias, o en el desarrollo psicológico, tiende hacia un "límite"? Y admitiendo que así sea para ciertas series particulares y bien circunscriptas, ¿es posible concebir, tomando como punto de partida la confrontación de una cantidad suficiente de series semejantes, la verificación de una hipótesis epistemológica general que se refiera al conocimiento en su conjunto (o, por supuesto, de varias hipótesis complementarias en caso de pluralismo de las estructuras)?

El problema es entonces el siguiente: ¿cómo integrar en una o en varias grandes series el estudio de los incrementos particulares de conocimientos, analizados en principio en forma aislada? Y en particular ¿cómo concebir el estudio de la convergencia de estas series hasta poder hablar de un pasaje en el límite? Mientras se trate de un sector parcial de conocimientos, como por ejemplo un concepto o un sistema circunscripto de operaciones, se admitirá sin dificultad alguna que es posible determinar qué le corresponde a la deducción lógica, a las diversas formas de representación intuitiva, a la experiencia en sus diferentes aspectos, a la acción y la percepción, etc. Sin embargo, aun cuando se acumule gran cantidad de análisis semejantes, ¿cómo extraer a partir de ellos una enseñanza general sin caer nuevamente en una simple especulación filosófica, tanto más tentadora en la medida en que pretende instalarse directamente en el conocimiento en sí y economizarse el estudio previo e inductivo de los incrementos particulares de los diversos conocimientos?

El análisis del desarrollo de un concepto permite generalmente la determinación de etapas sucesivas de construcción y la sucesión misma de estos estadios constituye un primer tipo de series, cuya ley de formación puede determinarse. Así, en el caso de muchos conceptos matemáticos y físicos, se puede observar un proceso psicogenético de desarrollo, que vuelve a encontrarse a grandes líneas en el plano histórico, que se ordena en etapas entre la acción elemental y luego la intuición perceptual o imaginada, en el punto de partida, y un sistema definido de operaciones concretas susceptibles a posteriori de diversas axiomatizaciones: la ley de sucesión se caracteriza entonces, acabamos de ver, por encaminarse hacia un estado de equilibrio reversible a partir de un estado inicial de irreversibilidad y no composición. En este caso, puede hablarse, sin metáfora alguna, de una serie genética y de su convergencia hacia cierto límite, definida por

una forma de equilibrio, es decir, por un cierto modo de composición del conjunto.

No obstante, se trata siempre en este caso de un límite parcial y, en consecuencia, provisorio, o relativo al corte momentáneo de un sector especial de conocimiento. Sin duda, la evolución que así alcanza el análisis genético, en el seno de este sector, pone de manifiesto una transformación de los instrumentos intelectuales del sujeto y, correlativamente con esta construcción de nuevos instrumentos, una transformación de la misma experiencia, es decir, de la realidad tal como aparece en el sujeto. Pero resulta claro que estas transformaciones solidarias del pensamiento y lo real aparente (es decir, relativo a un nivel determinado de este pensamiento), por más interesantes que sean en cuanto al mecanismo del incremento de los conocimientos, no pueden dar lugar a una fórmula que pueda generalizarse sin más, porque la fórmula que tendrá que expresarlas será a su vez relativa al sistema de referencias adoptado por el observador, es decir, por el psicólogo o el historiador que estudia estas transformaciones desde afuera apoyándose en sus propios conocimientos.

Aquí nos encontramos con el nudo del problema del pasaje entre los límites parciales que corresponden a los procesos evolutivos particulares de los conocimientos respectivos y el límite general que constituiría la determinación del conocimiento en su totalidad con la elección de una o varias de las hipótesis globales clasificadas en el punto 4. En efecto, el genético o el historiador estudia una serie de estadios A, B, C... X, y establece su ley de evolución y límite eventual. Pero, para hacerlo, tiene que elegir un sistema de referencias que estará constituido por lo real tal como se da en el estado de los conocimientos científicos considerados en el momento de su análisis, y por los instrumentos racionales tal como se dan en el estado de elaboración de la lógica y la matemática en este mismo momento de la historia. Ahora bien, también este sistema de referencia es cambiante...

Entonces el psicólogo puede estudiar la formación de algunos conceptos y extraer, a partir de este estudio, leyes de construcción que nos informen acerca del mecanismo del incremento de este tipo de conocimientos. Pero la psicología misma es un conocimiento en evolución y para establecer las leyes de formación de los conocimientos particulares se apoya sobre un sistema de referencia constituido por el conjunto de las otras ciencias, de la matemática a la biología. Por ello, si bien consigue seguir ciertos procesos epistemológicos restringidos hasta sus límites respectivos, no puede alcanzar sin más ese límite general que constituiría al conocimiento en su conjunto, puesto que ella forma parte de este último y no ocupa un puesto de observación externo. Menos aún podría pretender a ello en la medida en que admite, por razón de método, la evolución posible de todos los conocimientos y, por lo tanto, la movilidad indefinida del sistema de referencia en el que se sustenta.

¿Cómo superar las fronteras que así le impone el análisis genético por los sistemas de referencias que necesariamente requiere y cómo alcanzar leyes de construcción no especiales a ciertos sectores delimitados y que

podrían generalizarse poco a poco a todos los conocimientos teniendo así como límite al Conocimiento científico en sí mismo? Si el análisis genético se apoya necesariamente en un sistema de referencia formado por las ciencias tal como están constituidas en el momento considerado, naturalmente este sistema de referencia es el que ha de ser explicado a su vez para generalizar la explicación genética al conocimiento en su totalidad. Sin embargo, nos encontramos entonces ante la siguiente alternativa: o bien el análisis genético no consigue explicar su propio sistema de referencia y entonces fracasará en cuanto a la constitución de una epistemología general, o bien logrará hacerlo pero al precio de un caer en un evidente círculo, puesto que, en este caso, el análisis genético se apoyará sobre un sistema de referencias que a su vez dependerá de él.

Ahora bien, fieles a las enseñanzas que implica el desarrollo del pensamiento científico, esta segunda solución es la que debemos adoptar, por el solo hecho de que el conjunto de las investigaciones contemporáneas no están precisamente en camino de caer en este círculo. Este círculo, por más real que sea, no por ello es un círculo vicioso o, al menos, son las cosas mismas que lo imponen. En efecto, sólo constituye un caso particular del círculo del sujeto y el objeto, círculo inevitable no sólo para todo conocimiento, sino incluso para toda teoría del conocimiento. El conocimiento se apoya en un objeto fuera del cual no sería afectado el sujeto (desde el interior o desde el exterior) y, por lo tanto, este sujeto no podría conocerse a sí mismo puesto que carece de toda actividad; pero este objeto sólo puede conocerse a través del sujeto, si no, sería inexistente para él. Hoeffding insistió con claridad sobre este círculo inicial, según el cual el sujeto sólo se conoce por intermedio del objeto y sólo conoce el objeto respecto de su actividad como sujeto. Asimismo, toda teoría del conocimiento, para explicar cómo el objeto afecta al sujeto (se lo conciba como realidad exterior, o como pura representación o "presentación" a secas), debe, por su parte, plantear este sujeto y este objeto reunidos y constituyendo el objeto de su propia búsqueda, entonces el nuevo sujeto se constituye como el teórico del conocimiento: pero este teórico sólo logra conocer a su objeto (por lo tanto, la relación constituida por el conocimiento) por medio de su propio pensamiento (es decir, de su propio conocimiento) que sólo puede reconocer a su vez por la reflexión sobre este objeto. Para escapar a esta dificultad, se coloca *in medias res* y recurre así a ciertos informes previos acerca de los sujetos y objetos reunidos que estudia como objeto, pero sin embargo, tarde o temprano, deberá reintegrar estas presuposiciones en su propia explicación y entonces el círculo aparecerá nuevamente.

Sin embargo, si bien este círculo resulta inevitable, es susceptible de sucesivas ampliaciones, comparable en ello a ciertos círculos bien conocidos en el campo de la ciencia, como por ejemplo el de la medición del tiempo. Para medir el tiempo es necesario, en efecto, tener relojes que utilicen movimientos isócronos que sirvan como patrón, pero la medición de este isocronismo requiere a su vez la medición de otros movimientos del universo que sirvan para cronometrar, etc. Entonces puede extenderse al infinito la cadena sin salirse del círculo, pero cuanto más se lo amplía más las

convergencias observadas en esta creciente coherencia permiten tener la seguridad de que el círculo no es vicioso. Toda epistemología supone a su vez un círculo; entonces, cuando ella se extienda hasta abarcar al conjunto de las disciplinas que sirven como referencia al análisis genético, y a este análisis mismo, la extensión de este círculo será la garantía de una mayor coherencia interna que la que tendría en el caso de los sistemas filosóficos particulares.

En efecto, resulta claro que cuando se plantea el problema de la epistemología en el terreno del desarrollo del pensamiento y las ciencias particulares, el círculo del conocimiento, o del sujeto y el objeto, debe concebirse entonces como la estructura fundamental del sistema de las ciencias. Es cierto que es habitual concebir las relaciones de las ciencias entre sí como una sucesión rectilínea; así la matemática, la física (en su sentido amplio), la biología y las ciencias psicosociales se sucederían de acuerdo a un principio de jerarquía como el de la famosa serie de complejidad creciente y generalidad decreciente propuesta por Augusto Comte. Aparecen entonces dos preguntas. En primer lugar, ¿sobre qué se basa la matemática? Por supuesto que sobre nada que no sea ella misma. Pero si bien esto puede resultar claro desde un punto de vista metafísico o bien estrechamente axiomático, deja de ser satisfactorio desde el momento en que se buscan las condiciones que hacen que una axiomática sea posible. Entonces se ha de recurrir necesariamente a las leyes del espíritu humano, recurso explícito (H. Poincaré, L. Brunschvicg, etc.), o implícito a la psicología. En segundo lugar, y en el otro extremo de la serie, ¿a qué conducen las investigaciones de la psicología genética? Precisamente a explicarnos cómo se construyen las intuiciones y los conceptos de espacio, número, orden, etc., es decir, las operaciones lógicas y matemáticas. Apenas se abandona el punto de vista normativo o axiomático puro, la serie lineal de los conocimientos se vuelve en realidad circular, porque la línea que sigue y que inicialmente es una recta, se cierra luego sobre sí misma lentamente.

Ahora bien, el círculo epistemológico expuesto anteriormente no es sino la expresión de ese círculo de las ciencias, y en este sentido no sólo corresponde a la naturaleza de las cosas, sino que además resulta muy interesante estudiarlo en sí mismo. Para explicar la formación de los conocimientos, la psicología se ve obligada a apoyarse en un sistema de referencia, constituido por los conocimientos actuales propios de las otras ciencias; sin embargo y por otra parte, pretende dar cuenta, tarde o temprano, de este sistema de referencia como tal, puesto que —como los otros está formado de conocimientos sólo que situados a la vanguardia de la investigación científica y no en el pasado o en la raíz de esta misma investigación. Vemos pues que este círculo genético traduce precisamente el círculo constituido por la filiación efectiva de las categorías del pensamiento científico: las explicaciones de la psicología se refieren, tarde o temprano, a las de la biología; éstas se apoyan a su vez en las de la físico-química; las explicaciones físicas se apoyan en la matemática, y la matemática y la lógica sólo pueden fundarse en las leyes del espíritu que son el objeto de la

psicología. Además, puede observarse que el cierre del círculo implica la prolongación de la psicología o de la psicosociología en epistemología genética: la matemática no se apoya, en efecto, directamente sobre la psicología como tal, afirmación que resultaría absurda y equivaldría a hacer descansar la validez de los axiomas sobre la descripción empírica de los estados mentales, es decir fundar la necesidad operatoria sobre las comprobaciones empíricas. La matemática se sustenta en un conjunto de operaciones constitutivas, simplemente percibidas por la conciencia ingenua pero analizadas sistemáticamente por la reflexión crítica llamada "teoría del fundamento de la matemática". Ahora bien, esta teoría, ya de carácter epistemológico al mismo tiempo que integrada en los marcos de la ciencia, se apoya en la psicología. Sin embargo, pueden axiomatizarse directamente las operaciones constitutivas del pensamiento en forma lógica, y ello produce entonces la ilusión de un comienzo primero cuando al fin de cuenta corresponde a la axiomatización de uno de los objetos de la psicología, es decir las operaciones intelectuales mismas, con lo cual no se rompe tampoco con el círculo genético. A partir de entonces, para explicar la génesis de los conocimientos, la psicología tiene que referirse a la realidad exterior, tal como la conocen las ciencias biológicas y físicas y también a las reglas de la lógica y la matemática; a su vez este doble sistema de referencia se apoya en definitiva en las realidades intelectuales que sirven para construirlo y que la psicología pretende estudiar genéticamente: constituye por lo tanto, él también, el producto de una génesis o una construcción continua y dinámica, cuya característica específica consiste en formar un círculo que se extiende constantemente abarcando entre sus elementos a la psicología misma.

La hipótesis de trabajo que hemos de extraer a partir de estas reflexiones previas supera pues una simple metodología del análisis genético e histórico y puede servir como punto de partida para la epistemología genética en su totalidad. Esta hipótesis equivale a suponer que el pensamiento científico está constantemente comprometido en dos direcciones simultáneas y complementarias resultantes del círculo fundamental del sujeto y el objeto. A través de la matemática y la psicología la ciencia asimila lo real a los marcos del espíritu humano y sigue así una dirección idealista. En efecto, por una parte, la matemática asimila los datos sensibles a esquemas espaciales y numéricos y somete así la materia a un sistema de operaciones siempre más complejas y coherentes que permiten que la deducción domine la experiencia e incluso la explique. Por otra parte, la psicología analiza las operaciones y de ellas separa aquello que corresponde a la actividad del sujeto y que permanece irreductible a una simple sumisión a los datos de la realidad exterior. Si ésta es una de las dos direcciones constantes del pensamiento científico, la otra no resulta menos clara: a través de la física y la biología, la ciencia obedece a una tendencia realista, que subordina el espíritu a la realidad. La biología muestra así las conexiones de la percepción, la motricidad y la inteligencia misma con las estructuras del organismo, mientras que la físico-química inserta este organismo en un mundo de realidades materiales siempre más

alejado de los estados de conciencia inmediatos y, por su parte, concentra el conocimiento sobre el objeto.

Según se recorra el círculo de las ciencias en un sentido o en otro, se reduce el objeto al sujeto o el sujeto al objeto. Resulta así que la ciencia no es ni puramente realista ni puramente idealista, sino que se orienta en ambas direcciones al mismo tiempo, sin que sea posible anticipar, con legitimidad, el estado final de este proceso. Ahora bien, sería necesario conocer este estado final para contar con una epistemología definitiva o cerrada, y ya no limitada a las adquisiciones restringidas y progresivas, como sucede con la epistemología genética que sigue siendo pues esencialmente "abierta". Precisamente habría que cerrar el círculo de las disciplinas científicas. Ahora bien, este círculo nunca se clausura en realidad completamente, porque cada sistema de conocimiento que lo compone se halla en movimiento y entonces constantemente hay un desajuste entre un progreso efectuado en una de las direcciones y un progreso efectuado en la otra, de modo tal que el proceso en su totalidad podría ser concebido como una especie de espiral. Las leyes de esta construcción circular global constituyen el "límite" general de los desarrollos particulares estudiados por la epistemología genética.

En resumen, vemos cuál es la doble tarea de la epistemología genética. En el punto de partida, se confunde con cierto aspecto de la psicología del desarrollo intelectual: intenta explicar la formación de los conocimientos particulares y resolver así el problema de saber cómo se incrementan los conocimientos delimitados. Mientras se mantenga en el terreno psicogenético necesita, como la psicología, un sistema de referencia constituido por los conocimientos científicos admitidos en ese determinado momento. Sin embargo, en la medida en que el análisis psicogenético se prolongue en análisis histórico-crítico, el sistema de referencia —hasta entonces percibido como fijo— entra a su vez en movimiento y la investigación psicogenética se presenta entonces como un simple eslabón de una cadena que tiende a cerrarse sobre sí misma. El estudio de las primeras vueltas de la espiral descriptas por este proceso es la resultante del análisis histórico-crítico; pero, a medida que nos acercamos al estado actual de los conocimientos, la investigación epistemológica —entendida siempre en su aspecto estrictamente genético— tiende a confundirse con el análisis de las relaciones que poco a poco se anulan entre las ciencias: despejando el carácter cíclico de estas relaciones, la epistemología genética contribuye así, al fin de cuenta, a poner de manifiesto las profundas razones del círculo del sujeto y el objeto, círculo indefinidamente extendido por la investigación científica misma y que, una vez cerrado en el límite —pero en un límite quizás imposible de ser alcanzado— entregaría el secreto del conocimiento humano.

7. Epistemología genética restringida y generalizada. Llamaremos epistemología genética restringida a toda investigación psicogenética o histórico-crítica sobre las diversas formas de incremento de los conocimientos, en la medida en que se apoya sobre un sistema de referencia

constituido por el estado del saber admitido en el momento considerado. Por el contrario, hablaremos de epistemología genética generalizada cuando el sistema de referencia se halla englobado en el proceso genético o histórico que se trata de estudiar. El problema consiste entonces en encontrar un método que sea a la vez genético e histórico-crítico, es decir que proporcione criterios objetivos a la investigación que permitan resistir con alguna eficacia el peligro de construir nuevas metafísicas del conocimiento.

Ahora bien, englobar los conocimientos actuales de la ciencia en el proceso genético equivale, no sólo a considerar toda verdad —aun aquellas hoy admitidas— como relativas a un nivel determinado del pensamiento en desarrollo (incluidas las verdades lógicas fundamentales), sino además a no prejuzgar en absoluto en cuanto a las relaciones entre el sujeto y el objeto. Desde el punto de vista de la epistemología restringida, el problema no resulta tan agudo, ya que la actividad del sujeto y la construcción de su representación de las cosas se estudian en relación con una realidad que se supone externa, objetiva y estable: lo real tal como lo analiza la ciencia actual. Sin embargo, desde el punto de vista de una epistemología genética generalizada ya no existe una realidad dotada de estos atributos. Así como la estructura del sujeto que conoce ha evolucionado constantemente a lo largo de su construcción psicológica, así sigue abierta la cuestión de saber si seguirá desarrollándose sin límite alguno; por otra parte, el aspecto de la realidad que se supone externa ha cambiado constantemente durante esta evolución, lo cual significa que algunos de sus caracteres pretendidamente objetivos eran en realidad subjetivos; lo real puede seguir transformándose para las ulteriores formas de pensamiento y esta cuestión debe permanecer también abierta. Vemos que no hay forma alguna de resolver con seguridad el problema de las fronteras entre el sujeto y el objeto apenas se abandona el sistema de referencia sobre el que se apoya la epistemología genética restringida.

Sin embargo, una investigación epistemológica tan radicalmente relativista en su método como es este análisis genético generalizado se ve forzada a seguir hablando de sujeto y objeto, ya que estos dos polos del conocimiento se encuentran incluso en las posiciones idealistas o realistas más extremas que puedan encontrarse en el cuadro de las posibilidades previstas en el punto 4: para el apriorismo llevado hasta el idealismo más radical, siempre quedan objetos en tanto datos de conciencia imprevisibles, comprobados interiormente pero que no pueden deducirse como otros contenidos representativos; y para el empirismo más materialista, el organismo sigue reaccionando de modo siempre más complejo a los estímulos externos, lo cual constituye propiamente la actividad de un sujeto. Por lo tanto, en todas las concepciones subsiste el problema de determinar las relaciones entre el sujeto y el objeto. Pero ¿cómo proceder genéticamente en ausencia de todo sistema de referencia, es decir, con un método que se restrinja a permanecer totalmente "abierto"?

Ahora bien, así como las leyes de construcción particulares a los diversos conocimientos constituyen el objeto de estudio propio de la epistemología genética restringida, así las direcciones o "vecciones" ("*vections*")

inherentes a la marcha misma de las ciencias, considerada cada una en su conjunto, proporcionan a la epistemología genética generalizada su específico dominio de investigación. Si, por ejemplo, puede concebirse a título de hipótesis el progreso de los conocimientos científicos como describiendo una especie de espiral o proceso cíclico, una de cuyas direcciones se caracteriza por una reducción gradual del objeto al sujeto y la otra por la reducción inversa o complementaria, queda aún por verificar la existencia de estas direcciones a través del análisis global del movimiento cognitivo.

Por más provisorias y relativas a nuestra estructura mental actual que sean las verdades que hoy obtienen nuestra adhesión, sigue siendo siempre cierto que, a falta de anticipación del porvenir o a falta de seguridad en cuanto a él, podemos comparar este nivel actual con los precedentes y aislar la orientación que caracteriza al conjunto del desarrollo conocido. Esta determinación de las leyes generales de la evolución sólo constituye una generalización del método específico de la epistemología genética restringida, pero esta generalización proporciona el punto de apoyo del que se carecía con el abandono del sistema de referencia que empleaba el método restringido. Por lo tanto, esta generalización, o investigación de las leyes de construcción de conjunto, permite entrever el pasaje en el límite, pasaje que la epistemología genética constituye en su objetivo último y ello sin cometer infidelidad alguna a los métodos psicogenético e histórico-crítico, puesto que este último problema prolonga sin más las cuestiones "restringidas".

Sin embargo, la cuestión de las direcciones de conjunto o las vecciones presenta no obstante muchos obstáculos y su estudio presupone, al menos, dos clases de precauciones, relativas por otra parte a un solo y mismo constante escollo. André Lalande, del que conocemos la profundidad con que ha caracterizado la utilidad de esta investigación de las vecciones, procedía históricamente y comenzaba *in medias res* en oposición a las reconstrucciones *ab initio*; sin embargo atenuaba el relativismo genético que parece presuponer esta investigación distinguiendo una "razón constituida" siempre en evolución y una "razón constituyente" que sería la guía del movimiento evolutivo. En su pensamiento, la razón constituyente se reducía, por otra parte, a la identificación gradual de lo diverso; en cambio, la razón constituida estaba formada por los principios múltiples que han marcado, a lo largo de la historia, los progresos de la identificación misma. Resulta claro de por sí que éste podría ser el resultado de los análisis genéticos, tanto más en la medida en que Emile Meyerson ha encontrado, por su cuenta, la misma identificación en cada etapa del conocimiento científico. Sin embargo, sería peligroso, y por razones de método, distinguir por principio una razón constituida —sometida a la evolución dirigida cuya vección se intenta estudiar— y una razón constituyente sustraída por así decir de antemano a toda transformación.

La primera precaución que debemos tomar, desde el punto de vista de una epistemología genética generalizada, consiste pues en no limitar previamente la posible evolución presentando la dirección propia a la evolución intelectual como el resultado de la presencia —desde el comienzo— de un

factor a priori que se la imprimiría. Repitamos, la existencia de este factor puede muy bien confirmarse a través de la investigación genética, y en absoluto se lo debe excluir como hipótesis o posibilidad, muy por el contrario. Sin embargo, no se encuentra implicado en el método como tal, e incluso cuando cierta cantidad de hechos parece imponer un dualismo relativo entre una razón constituida y una razón constituyente (por ejemplo, entre los principios particulares de las ciencias y los de la lógica en general, etc.), podría muy bien suceder también que ambas estén arrastradas, pero a velocidades diferentes, en la corriente de la continua construcción del saber.

Surge entonces la segunda precaución que se ha de tomar. El descubrimiento eventual de una ley de evolución en el dominio del pensamiento científico sólo puede valer hasta cierto nivel alcanzado por él actualmente. La interpolación retrospectiva es peligrosa, pero la extrapolación respecto del porvenir es resueltamente ilegítima, salvo en la forma de simple probabilidad indeterminable. Desde este punto de vista, la teoría del conocimiento de León Brunschvicg —modelo de epistemología "abierta"— llevaba su prudencia hasta el extremo de no hablar de evolución dirigida y comprobar simplemente las crisis y los cambios de orientación en el transcurso de la sucesión histórica. Hemos enunciado anteriormente —en un estudio crítico a uno de las hermosas obras de este maestro [5]— la posibilidad de conciliar su método con la investigación de una dirección o una "ortogénesis", como dicen los biólogos. A lo cual respondió: "ortogénesis si se quiere, pero a condición de que sólo se la conozca a posteriori". No podemos dejar de aceptar este consejo, pero con ello no es suficiente.

Nuestras dos reglas serán entonces las siguientes: ni método a priori, ni anticipaciones. Sin embargo, según la hipótesis de la existencia de un círculo en las disciplinas positivas, es decir, por lo menos dos direcciones del pensamiento científico, quizá resulte menos intensa la tentación de una anticipación arbitraria puesto que las interpretaciones realistas e idealistas de la ciencia se presentarán más como posiciones complementarias que como debiendo una obtener la supremacía gradual sobre la otra. ¿En qué consiste entonces la fecundidad de esta hipótesis? y ¿a qué equivale, en particular, el intento de determinar los "límites" propios de las series convergentes que se estudiarán así?

La hipótesis contraria a la del orden cíclico de las ciencias está representada en el estado actual de los trabajos epistemológicos, ante todo por las ideas provenientes de la lógica tal como la comprendió el "Círculo de Viena", y que dieron lugar a una corriente que conoció un real éxito con el nombre de movimiento por la "Unidad de la Ciencia". Se trata esencialmente de un esfuerzo para obtener la axiomatización sistemática de las ciencias, aplicada tanto a los principios de las ciencias experimentales como a las teorías propias de las ciencias deductivas. La imagen de las ciencias resultante es naturalmente la de un orden lineal, que sigue las etapas de

[5] "L'expérience humaine et la causalité physique selon L. Brunschvicg", *Journ. de Psychol.*, 1923.

esta logicalización: lógica, matemática, física, química, biología, psicología y sociología. La estructura de las ciencias escaparía, por otra parte, a todo intento de explicación genética, puesto que un sistema de proposiciones intemporales sustituye así necesariamente al sistema de las ideas en evolución. Ahora bien, por más interesante que sea tal intento —con el cual estaremos de acuerdo en el análisis de muchos puntos, empezando por el método extraño a toda metafísica— nos parece que subsiste una dificultad importante que, por otra parte, es más el resultado de la concepción "tautológica" que los partidarios de este movimiento tienen en cuanto a las verdades lógicas y matemáticas que el resultado de sus hipótesis restantes. Porque este esfuerzo para culminar en la "Unidad de la Ciencia" condujo, al fin de cuenta, a una dualidad fundamental: por una parte, se reconocen las verdades empíricas, cuya comprobación proviene siempre, tarde o temprano, de un control activo y perceptual por parte del sujeto; pero, por otra parte, las proposiciones lógico-matemáticas, concebidas como un simple lenguaje o una "sintaxis lógica" subsisten independientemente de toda experiencia y constituyen así como una especie de mundo aparte. El primer problema que plantea este dualismo radical propio de la epistemología "unitaria" consiste entonces en saber cómo las verdades empíricas van a relacionarse entre sí o, como dice Ph. Frank, "coordinarse" con las proposiciones sintácticas destinadas a expresarlas; los autores unitaristas abordaron este problema con gran sutileza. Pero subsiste un segundo problema: también se trata de la "coordinación" de las conexiones lógicas o lógico-matemáticas con las operaciones mentales efectivas del sujeto que las emplea, ya que una "sintaxis" —por más "lógica" que sea— presupone un sujeto capaz de emplearla, y todo lenguaje —por más matemático que sea— implica no sólo individuos de carne y hueso aptos para hablar, sino además una sociedad que lo ha engendrado. Entonces, resulta claro que el círculo de las ciencias vuelve a aparecer, aunque levemente transformado: las verdades empíricas se asimilan poco a poco a las proposiciones sintácticas, pero éstas se sustentan en operaciones intelectuales que emanan de un sujeto que forma parte de la realidad empírica.

Ahora bien, si tal es el caso, se perciben cuáles son las tareas inmediatas de una epistemología genética y la posible fecundidad de sus hipótesis primeras: la primera tarea consiste en reconciliar —si así puede decirse— la lógica y la psicología; la lógica conduce a las axiomatizaciones intemporales cuya importancia señaló la corriente de ideas recientemente mencionada, y la psicología conduce al estudio de las operaciones efectivas que constituyen la ciencia y la lógica misma en su desarrollo. Los dos polos del conocimiento son, sin duda alguna (y es así, sean cuales fueren las interpretaciones, incluidas las de la epistemología "unitaria"), la necesidad propia de las implicaciones —que tienden a sustraerse al tiempo— y la sucesión regular de los hechos en el tiempo. Ahora bien, hoy estamos bien equipados para el análisis de las implicaciones lógico-matemáticas, y toda la axiomática contemporánea constituye en este sentido un instrumento ya muy eficaz. Por otra parte, estamos bastante adelantados en la tarea de establecer una conexión entre los hechos físicos y las implicaciones lógico-

matemáticas. En comparación con estos dos conjuntos imponentes de adquisiciones, hay dos lagunas que nos impiden progresar en la constitución de una epistemología científica que obtenga todos los sufragios: el pasaje de lo físico a lo biológico, pasaje sobre el que muchos físicos y los más grandes biólogos concentran actualmente sus esfuerzos sin conseguir aún disipar las oscuridades provenientes de este problema capital, y el vínculo entre los dominios psicofisiológicos o mental y lógico-matemático, sobre el que entrevemos las posibles relaciones entre la acción temporal o irreversible y las operaciones reversibles, fuentes de implicaciones intemporales; sin embargo, respecto de este punto, no hemos aún superado el nivel de las percepciones preliminares y globales. Esta doble laguna de nuestro saber no excluye sin embargo en absoluto que se prosiga la gran obra colectiva de la epistemología científica colocándonos resueltamente en el terreno genético: por el contrario, sobre este terreno, y únicamente sobre este terreno, se evitarán las sorpresas reservadas a aquellos que olvidan la importancia epistemológica fundamental de los factores biológicos y psicológicos, y se contribuirá al mismo tiempo a la comprensión de estos factores y a su inserción en el sistema de conjunto constituido por la teoría del conocimiento científico.

Primera parte

EL PENSAMIENTO MATEMATICO

La posibilidad de una ciencia matemática a la vez rigurosamente deductiva y que se adapte exactamente a la experiencia ha constituido desde siempre el problema central de la epistemología. La cuestión es más perturbadora aún desde el punto de vista genético.

En efecto, por una parte la matemática concuerda con la realidad física de modo muy detallado. Nunca sucede que el físico —por múltiples y diversas que sean las estructuras o las relaciones que descubre en el mundo material— encuentre una estructura que no pueda expresarse con precisión en el lenguaje matemático, como si existiera una suerte de armonía preestablecida entre todos los aspectos del universo físico y los marcos abstractos de la geometría y el análisis. Sin embargo, hay algo más aún: sucede que este acuerdo se realiza no sólo en el momento del descubrimiento de una ley física, o a posteriori, sino que los esquemas matemáticos anticipan, con años de distancia, el contenido experimental que luego se insertará en ellos. Las formas geométricas y analíticas pueden elaborarse sin preocupación alguna por la realidad. Sin embargo, en la medida en que son deductivamente coherentes, se tiene la seguridad, no sólo de que la experiencia jamás podrá cuestionarlas, sino además —y éste es el punto paradójico— que la experiencia las llenará en parte, tarde o temprano, y se adaptará perfectamente a ellas. El ejemplo más hermoso de esta inserción de lo real en los marcos preparados por la deducción matemática es sin duda el de la geometría riemaniana. Estamos ante una construcción libre y audaz, llevada a cabo al margen de la geometría clásica, e incluso contradiciendo ese famoso postulado de Euclides que, por carecer de demostración, se ha considerado como impuesto por la observación directa. Así son estas libres creaciones del espíritu matemático, no preocupadas en absoluto por lo real. Ahora bien, más de medio siglo después de este desafío a la realidad física, sucede que la física misma llega a considerar a la geometría riemaniana como más apta para explicar los fenómenos de gravedad que la geometría euclidiana; la teoría de la relatividad emplea sin más el marco así preparado y la experiencia otorga la razón a este trazo genial. Otro ejemplo, relacionado con el mismo período de renovación de la física: en 1900, Ricci y Lévi-Civita, deseosos de encontrar la forma de las ecuaciones diferenciales independientemente de

los sistemas de coordenadas, crean el "cálculo diferencial absoluto"; ahora bien, este esquema, puro trabajo de lujo de matemáticos embriagados de rigor, se convierte, algunos años más tarde, en el instrumento esencial que emplea A. Einstein, ya que sin el cálculo tensorial la relatividad no hubiera contado con su técnica específica. Un ejemplo clásico de las mismas anticipaciones lo encontramos en los números "imaginarios": nacidos de una simple generalización de las operaciones aritméticas (su solo nombre basta para indicar la "intención del legislador" en cuanto a ellos) desempeñaron sin embargo un papel cada vez más importante en la geometría, la mecánica y la teoría de las variables complejas; en consecuencia, en todo análisis con sus aplicaciones múltiples. Por último, no sería difícil acumular los ejemplos en el dominio de la microfísica actual que emplea los más diversos esquemas matemáticos preexistentes, desde el cálculo de las matrices (donde vuelve a encontrarse la presencia de los números imaginarios) hasta los "espacios abstractos", cuya toma de contacto con lo real experimental constituye quizás una de las paradojas más curiosas de la investigación contemporánea.

Ahora bien, al mismo tiempo que siempre corresponde a algún sector de la realidad física, la matemática la supera constantemente por sus generalizaciones. Y en particular ya no se basa de ningún modo —a partir de cierto grado de su desarrollo— en la experiencia misma. Sin duda, en el punto de partida, el niño tiene necesidad de un control empírico para estar seguro de que $1 + 4 = 2 + 3$, así como los egipcios descubrieron, a través de la medición, los lineamientos de la geometría euclidiana. Sin embargo, a partir de los 11 a 12 años en el niño y a partir de los griegos en la historia, el rigor de la deducción matemática se ha elevado por encima de la comprobación experimental. La experiencia puede ser la ocasión de la aparición de nuevos problemas y efectivamente lo es constantemente, orientando así a veces al matemático en direcciones hacia las cuales lo habrían conducido de entrada sus intereses. Sin embargo, los matemáticos no recurren nunca a la experiencia del mismo modo que lo hace la física (como criterio de verdad). Una proposición matemática es verdadera en la medida en que racionalmente se la ha demostrado y no porque concuerde con la realidad externa: éste es un punto sobre el que todo el mundo está de acuerdo.

¿Cómo explicar entonces este poder misterioso de operaciones que parecen surgir de acciones que se refieren a la experiencia más cercana pero que, al coordinarse entre sí, se alejan de la realidad empírica en un movimiento cada vez más acelerado hasta dominarla, anticipársele e incluso desinteresarse soberbiamente de las confirmaciones que ella les ofrece en los terrenos limitados de lo actual y lo finito? En efecto, por una parte, la matemática elemental parece ser el resultado de algunas acciones entre otras: desplazamiento, reuniones o disociaciones, superposiciones, correspondencias. Por el contrario, el reino de la matemática superior constituye un mundo de transformaciones operatorias que desborda por todas partes las fronteras de la experiencia real o efectivamente realizable. En consecuencia, en un comienzo el universo real parece infinitamente

más rico que el de las operaciones nacientes, pero durante el desarrollo se invierten las posiciones y las operaciones deductivas son las que van más allá de las transformaciones realmente observables.

Surgen entonces los dos problemas fundamentales planteados por el desarrollo de las operaciones matemáticas. El primero consiste en el acuerdo permanente de las operaciones deductivas y la realidad física: como estas operaciones son originariamente acciones que tienen éxito, el acuerdo parece no presentar misterio alguno (apariencia que, por otra parte, requiere más discusión); pero estas mismas operaciones se convierten luego en acciones simbólicas interiores y más ricas que las transformaciones experimentales; ¿cómo concuerdan entonces con estas últimas? Ahora bien, este primer problema implica un segundo: el de la fecundidad del razonamiento matemático. En efecto, en la medida en que el mundo de las construcciones geométricas y analíticas va más allá del mundo real, al mismo tiempo que en parte concuerda con él, se trata de comprender no sólo esta correspondencia sino además esta superación. Desde este punto de vista, el razonamiento matemático se presenta como una especie de creación (salvo, por supuesto, que se admitan otras soluciones, tales las platónicas, etc., si el estudio del desarrollo nos condujera a este resultado). Partiendo de algunos axiomas tan poco numerosos y tan pobres como sea posible en cuanto a su contenido y de algunas definiciones, el matemático elabora, mediante operaciones constructivas, este inmenso universo de relaciones que constituyen los seres llamados abstractos. El razonamiento matemático parece ser entonces constructivo, ya se nos revele esta apariencia como falsa o correcta en el transcurso del análisis genético: en todos los otros dominios de la ciencia, la deducción pura sólo produce quimeras y el progreso de los conocimientos supone un recurso continuo a la observación y la experiencia, en cambio, la deducción matemática es indefinidamente productora. ¿Cómo explicar esta construcción independientemente de que sea lógicamente real o que sólo corresponda a una ilusión psicológica?

Nos enfrentamos aquí con dos problemas clásicos que nos gustaría examinar en esta primera parte, pero exclusivamente desde una perspectiva genética e histórico-crítica. En efecto, señalemos que, independientemente de toda filosofía y del hecho de que estos grandes problemas hayan inspirado a todas las epistemologías metafísicas desde Platón a Descartes y desde Kant a Husserl, los dos problemas —el acuerdo de la matemática con la experiencia y la construcción de las operaciones matemáticas— se imponen también a la epistemología genética, aun la más restringida, porque ya se imponen a la psicología de la inteligencia e incluso a la fisiología de la percepción. No puede comprenderse el desarrollo de la inteligencia en el niño y tampoco la organización de las estructuras perceptuales si no se toma alguna posición respecto de la formación del número y del espacio. Ahora bien, el análisis de esta formación conduce necesariamente, o bien a situar el número y el espacio en las cosas mismas —donde las encontraría la percepción y de donde las extraería la inteligencia—, o a buscar su secreto en cierta relación entre las cosas y la acción, o bien en la estructura del sujeto que piensa y percibe. En todos estos casos, se plantea el problema

de la concordancia entre la matemática y lo real y sería tan imprudente resolverlo al nivel de la operación naciente, sin observar más profundamente en qué se convierten las operaciones una vez que se han constituido, como limitar el análisis al examen de los estadios superiores sin ocuparse en absoluto por el punto de partida.

1

LA CONSTRUCCION OPERACIONAL DEL NUMERO

Hay pocas ideas que sean tan claras y distintas como la del número entero, y pocas operaciones cuyos resultados sean tan evidentes como las de la aritmética elemental: ciencia al alcance de los niños, ciencia cuya validez nadie discute y cuyas verdades iniciales se han enriquecido constantemente, sin nunca quebrantarse por ello... Y, sin embargo, si comparamos la proposición "$1 + 1 = 2$", cuyos términos son transparentes, con esta otra proposición: "los organismos surgen de un huevo, crecen, envejecen y mueren", donde cada término presenta muchas oscuridades, comprobaremos que la simplicidad del problema epistemológico planteado por estos dos tipos de verdades es, por así decir, inversamente proporcional a la claridad de las ideas. En efecto, todos estarán de acuerdo en considerar que la segunda proposición tiene un origen empírico, e incluso si un filósofo pretendiera deducir a priori los conceptos de huevo, crecimiento, envejecimiento y muerte a partir del concepto de organismo vivo, hubiera comenzado por aprender que estos fenómenos existen partiendo de la simple observación (situación a la que siempre se encuentra reducido el biólogo, con algunas experiencias de más). Por el contrario, la significación epistemológica del número dio lugar a las más diversas hipótesis y además muy contradictorias entre sí, hasta tal punto que resulta ya muy difícil distinguir y ordenar los problemas. La proposición "$1 + 1 = 2$" ¿es una verdad, una convención o un enunciado tautológico? En primer lugar, ¿esta relación se nos impone en función de la experiencia? y ¿en función de qué experiencia? ¿Se trata de una relación construida a priori, o también de un objeto de intuición inmediata, y entonces de qué tipo? El número, ¿constituye un primer concepto, o es una síntesis de operaciones simplemente lógicas?

Así como la verdad técnica de la aritmética está fuera de toda discusión, así la cuestión de saber qué es el número pone de manifiesto la sorprendente incapacidad del pensamiento para captar sin más cuál es el carácter de ciertos instrumentos que, sin embargo, cree comprender totalmente y que emplea en casi todos sus actos.

Este contraste entre la evidencia instrumental del número y lo caótico

de las teorías epistemológicas construidas por la matemática para explicarlo muestra, de por sí, la necesidad de una investigación genética: el desconocimiento del pensamiento respecto de los engranajes esenciales de su propio mecanismo es, en efecto, el índice psicológico de su carácter elemental y, en consecuencia, de la antigüedad del nivel de formación al que es necesario remontar para poder alcanzarlos.

1. Las teorías empiristas del mundo. A. La explicación del número cardinal por la "experiencia mental". Sabemos que los nombres de Kronecker y Helmholtz quedaron asociados a una interpretación psicológica del número. En particular Helmholtz, en sus múltiples cualidades de fisiólogo y psicólogo de las percepciones, por una parte, y, por la otra, de físico y matemático, no vaciló en sostener que la construcción del número puro (en oposición a los números aplicados a la medición) se sustenta en "realidades puramente psicológicas". Volveremos en el punto 2 sobre esta concepción del número ordinal basado en la sucesión de los estados de conciencia. Insistiendo más sobre la experiencia externa que sobre la experiencia interna, Mach y Rignano interpretaron, por otra parte, la formación del número en función de una experimentación aplicada mentalmente a la realidad. La "experiencia mental", nos dice Mach,[1] consiste en "imaginar" a través del pensamiento "la variación de los hechos" (pág. 200). Casi puede afirmarse entonces, con su traductor, que es la "imitación mental de un hecho" (pág. 3). Al menos, "la naturaleza de la experiencia anteriormente adquirida permite el éxito de una experimentación mental" (pág. 206). A partir de entonces, si el concepto de número se construye gracias a las experiencias reales de reunión y distinción, de ordenamiento y correspondencia (pág. 317), bastará luego recordar, en la experiencia mental, los conjuntos de diversos órdenes así formados y manipularlos en la imaginación para generar las operaciones de la aritmética. El cálculo no es sino una prolongación, por el pensamiento, de la numeración efectiva, un "medio indirecto de contar" (pág. 320). E. Rignano[2] y luego el psiquiatra Ph. Chaslin[3] retomaron y desarrollaron ampliamente esta explicación de las operaciones matemáticas por la experiencia mental. El razonamiento, dice E. Rignano, "no es otra cosa sino una sucesión de operaciones o experiencias pensadas", lo cual parece subrayar aun más la dimensión de actividad específica de la construcción operatoria, pero luego se coloca el acento nuevamente en la experiencia anterior de las cosas mismas, reanimada por el recuerdo y controlada por la simple atención. Unicamente Chaslin parece orientarse hacia la interpretación propiamente

[1] E. Mach: *La connaissance et l'erreur.* Trad. Dufour. París, Flammarion, 1917.

[2] E. Rignano: *La psychologie du raisonnement.* París, Alcan, y *Scientia* XIII-XX. 1913-1916. [Hay versión castellana: *Psicología del razonamiento.* Madrid, Espasa-Calpe, 1960.]

[3] Ph. Chaslin: *Essai sur le mécanisme psychologique des opérations de la mathématique pure.* París, 1926.

operatoria, caracterizando las propiedades del objeto aritmético por las operaciones que sobre él pueden efectuarse.

No resulta inútil pues abordar el examen de la génesis del número con la discusión de esta concepción acerca de la experiencia mental, de modo tal que se pueda disipar el equívoco fundamental que ha quedado asociado con su interpretación. Desde el punto de vista de la descripción misma de los hechos, no hay nada que objetar al empleo de esta expresión: por el contrario, expresa muy bien la observación general de que toda experiencia materialmente ejecutada es susceptible de ser luego interiorizada en una experiencia imaginada y, lo que es aun más importante, que todo pensamiento —por más abstracto que sea— descansa sobre esta mentalización de las acciones y experiencias posibles. Pero, esta comprobación psicológica no conduce necesariamente al empirismo epistemológico, no más (ni menos) que la comprobación del papel histórico de la experiencia en el desarrollo de las ciencias: en efecto, así como hay que preguntarse, en cada dominio delimitado, en qué consiste la experiencia, y cuáles son, en su constitución, las partes respectivas que corresponden a la actividad del sujeto y a los datos objetivos, así toda "experiencia mental" presenta el mismo conjunto de problemas epistemológicos en vez de resolverlos por su sola presencia.

Desde este punto de vista, se impone una primera distinción. Epistemológicamente, algunas experiencias mentales (I) consisten simplemente en imaginar una realidad exterior al sujeto, como cuando Galileo intentaba representarse el incremento de velocidad anteriormente a toda experimentación efectiva.[4] Otras experiencias mentales (II) equivalen, por el contrario, a imaginar no simplemente "las variaciones de los hechos" —como dice Mach— sino las acciones del sujeto que hace variar los hechos, lo cual no es en absoluto lo mismo. En efecto, en el caso de la acción del sujeto poco importa que la transformación se produzca materialmente o "en pensamiento": siempre se trata de una actividad de las cosas mismas, se trata de una variación exterior, aunque se la conciba interiormente. Que la suma $1 + 1 = 2$ se realice a través de acciones materiales, o simbólicamente con la intervención de objetos físicos, o de modo totalmente "abstracto", el hecho esencial es que el sujeto reúne dos unidades, es decir que actúa: aun cuando esta acción sea exterior se halla determinada por un mecanismo interno propio de la actividad del sujeto. Por lo tanto no es más que un juego de palabras confundir las "variaciones de los hechos" exteriores representados interiormente y la imaginación de posibles acciones que, ya en su forma exterior, manifiestan la actividad interna del sujeto. Ahora bien, Mach y Rignano pasan sin cesar de uno de estos sentidos al otro, y ello les permite concluir sin más desde la existencia psicológica de las experiencias mentales al empirismo epistemológico.

Interviene luego una segunda distinción, desde un punto de vista sobre todo psicológico, pero que tiene su importancia epistemológica. Se podría

[4] Véase Koyré: *Études galiléennes*. Hermann, 1939. (por ejemplo, pág. 242).

objetar a la posición anterior que el sujeto, al actuar sobre lo real, se limita a insertar en él una variación entre otras, cuyos resultados leerá desde afuera (aun cuando las imagine a través de una "comprobación mental"): entonces se tendría la justificación de la hipótesis empirista. Pues bien, la distinción que acabamos de proponer ahora parece conducir, en un primer lugar, a esta conclusión. En el caso en que la "experiencia mental" equivale a imaginar las acciones mismas del sujeto (II), es necesario, en efecto, distinguir además la imaginación de acciones mal diferenciadas —no suficientemente coordinadas entre sí y obligadas, en consecuencia, a apoyarse en la realidad exterior para culminar en la previsión de sus resultados, (II A)— y la imaginación de operaciones propiamente dichas, es decir (según la definición que adoptaremos), de acciones que se han hecho reversibles y suficientemente coordinadas como para dar lugar a composiciones susceptibles de anticipaciones precisas (II B). Con esto nos acercamos a la génesis del número, ya que las acciones constitutivas de las operaciones numéricas comienzan por presentar el primero de estos dos tipos (en la forma de experiencias materiales y luego de experiencias mentales II A) antes de alcanzar el segundo (II B).

Tomemos como ejemplo las experiencias, efectivas o mentales, de establecimiento de correspondencias en las que insisten Mach y Rignano, e intentemos analizarlas en su origen infantil, desde el punto de vista de las dos distinciones que acabamos de introducir.

Supongamos que damos a un niño seis fichas rojas alineadas y que le pedimos que encuentre otras tantas fichas azules, dentro de un conjunto mayor que se pone a su disposición [6]: el niño coloca en fila seis fichas azules, tomándolas de a una y colocando cada una frente a su correspondiente ficha roja; pero si se separan un poco los elementos de una de las dos líneas, el niño de 5 a 6 años estima entonces, a menudo, que ya no hay equivalencia entre los dos conjuntos ("hay más fichas rojas", etc.) porque, en este caso, ya no hay correspondencia visual regular y porque el espacio ocupado por una de las filas es mayor que el ocupado por la otra. ¿Estará al menos seguro, cuando se vuelvan a colocar las dos hileras de igual modo, que las fichas corresponderán nuevamente a otros tantos elementos colocados en frente? Los niños más pequeños ni siquiera están seguros de ello (por ejemplo, seis huevos que se sacan de seis hueveras y se colocan en montón no volverán a encontrar con seguridad su recipiente cuando se los vuelve a ordenar, como si su cantidad hubiera variado por el solo hecho de que se han producido cambios en la disposición espacial); en cambio otros niños presentan como probable el retorno a la correspondencia término a término, sin por ello deducir que las fichas distanciadas corresponden biunívocamente a las fichas más apretadas.

[6] Para el detalle del experimento y los resultados obtenidos, véase Piaget y Szeminska: *La genèse du nombre chez l'enfant*. Delachaux et Niestlé, 1940, cap. III. [Hay versión castellana: *La génesis del número en el niño*. Buenos Aires, Guadalupe, 1967.]

En estos primeros ejemplos hay toda una gama de experiencias, efectivas o "en pensamiento", cuya variedad confirma de entrada la complejidad del problema de la experimentación mental y la necesidad de las distinciones que acabamos de introducir. En primer lugar, cuando para obtener dos colecciones equivalentes, el sujeto imagina dos series que se corresponden ópticamente (cada término colocado frente al término correspondiente), ¿no podemos decir que el razonamiento simplemente imita lo real, puesto que la experiencia mental consiste en "imaginar la variación de los hechos" (tipo I)? Respondamos, en primer lugar, que si así fuera ya tendríamos una prueba de que la imitación de los hechos exteriores no basta para producir el número, puesto que la configuración perceptual de las dos hileras que se corresponden ópticamente no produce una equivalencia permanente entre los dos conjuntos ni tampoco una conservación de cada conjunto cuando se modifica la figura intuitiva. En este sentido, el caso de los niños que creen en un retorno posible a la configuración inicial es particularmente significativo: imaginan mentalmente ese retorno sin deducir de él la equivalencia de la fila espaciada y la fila más compacta. Por lo tanto, en el establecimiento de correspondencia hay algo más que la imaginación o la percepción directa de esta correspondencia totalmente construida: hay una sucesión de acciones inherentes al sujeto. Así, podemos comprobar que estas experiencias del niño pertenecen a la segunda de las categorías distinguidas al comienzo (tipo II): su experiencia, real o mental, consiste en leer el resultado de las acciones del sujeto, y no directamente la variación de los hechos.

Interviene entonces la segunda distinción: estas acciones, materiales o imaginadas, no provocan aún una composición deductiva exacta, puesto que no culminan en la conservación de los conjuntos manipuleados. Por lo tanto, el niño necesita efectivamente de la experiencia para asegurarse la posibilidad de un retorno a la configuración inicial, o para comprender el pasaje de una configuración a otra. Permanece así en el primero de los dos tipos distinguidos en la segunda categoría de experiencias mentales (II A). ¿Cómo pasará desde ahí al segundo tipo (II B)? y ¿en qué consiste el tipo de experiencias a las que se entrega? Examinemos en primer lugar los hechos: a un nivel superior al precedente, es decir, alrededor de los 7 años, el niño sabrá imaginar, sin necesidad de experiencia real alguna, que toda modificación espacial o perceptual de una de las dos filas de fichas dejará invariante la equivalencia $6 = 6$: esta equivalencia se fundará entonces en una correspondencia biunívoca que, a partir de entonces, se concebirá independientemente de la correspondencia óptica; además, considerará como evidente y sustentada en una necesidad racional la conservación de cada conjunto a lo largo de los posibles desplazamientos de sus elementos. Incluso hará de esta equivalencia constante y de esta conservación una suerte de verdad a priori, pero este a priori —como todos aquellos que hemos de seguir encontrando— aparece al término y no al punto de partida del proceso genético, y caracteriza por lo tanto la fase de su equilibrio final y en absoluto de formación. ¿Debemos entonces admitir simplemente que, habiendo aprendido a través de una sucesión de

experiencias, la posibilidad de volver a encontrar siempre la misma correspondencia, el sujeto se limita a imaginar mentalmente estas experiencias hasta considerar su resultado como necesario? Estos hechos ¿nos harán remontar, desde la experiencia mental de Mach y Rignano, al empirismo de Hume y a su asimilación de la necesidad únicamente con los productos del hábito?

El desarrollo de la acción, caracterizado por la sucesión de las dos fases (II A y II B) que acabamos de recordar, es más complejo que un simple pasaje de experiencias materiales y vacilantes a una experiencia interiorizada en la imaginación. Si la idea de experiencia mental conserva todo su valor para las fases iniciales II A, es decir, cuando el sujeto se limita a representarse de modo intuitivo algunas acciones posibles, se convierte en simplista e ineficaz cuando expresa la capacidad de ejecutar mentalmente un conjunto definido de operaciones (II B): en este último caso, en efecto, la experiencia mental proviene de estas operaciones, o se apoya en ellas, pero no las explica. Una diferencia mucho más importante que la imaginación de las posibles acciones opone, en efecto, la fase de 5-6 años y la fase de 6-7 años en las precedentes experiencias: las acciones específicas de la primera fase (II A) están aún insuficientemente coordinadas entre sí, y el sujeto, por carecer de esta coordinación completa, se ve obligado a apoyarse constantemente en la imaginación de su resultado, o incluso en la percepción. En particular, estas acciones no son aún reversibles en absoluto, y cuando el sujeto admite un retorno a la configuración inicial, sólo se trata de un posible retorno empírico al punto de partida y todavía no de una operación inversa concebida como necesaria. Por el contrario, en la segunda fase (II B), se considera que cada acción puede invertirse, y esta reversibilidad es la que produce el sentimiento de la necesidad de la conservación de los conjuntos y sus equivalencias. Ahora bien, sería absurdo ver en la reversibilidad un producto de la imaginación, la percepción, y más aún del hábito: una imagen sucede a otra, o una percepción a otra, según un flujo irreversible, aún muy visible precisamente en el curso de la primera de nuestras dos fases, e invertir un hábito consiste en adquirir un nuevo hábito. En efecto, aun percibiendo o imaginando las configuraciones sucesivas en un orden invertido o en su retorno, el niño no deduce de ahí en absoluto, durante esta primera fase II A, la reversibilidad de las relaciones, porque precisamente carece del establecimiento de relaciones reversibles, es decir, de inversión de las acciones como tales. Por lo tanto, en la coordinación misma de las acciones, es decir, en su composición progresiva, debe buscarse el tránsito de la acción empírica a la operación reversible y no en la simple interiorización de la primera en forma de "experiencia mental".

Si éste es el caso, percibimos entonces en qué consiste la experiencia propia de la primera fase (II A) y que precede a la coordinación operatoria. Como volveremos a ver en todas las situaciones en que un concepto matemático se halla preparado por un sistema de acciones, se trata mucho más de experiencias que el sujeto realiza sobre sus propios actos que de experimentación sobre los objetos como tales. Cuando establece la correspondencia de las fichas azules con las rojas, estos cuerpos físicos no desempeñan,

en efecto, papel alguno en tanto físicos, sino en tanto instrumentos —y casi podría decirse en tanto alimentos— para la acción misma: se los asimila a ellos al esquema de esta acción, mucho más de lo que la acción se acomoda a ellos como si se tratase de estudiar su color, su resistencia o su peso. Cumplen pues con una función apreciable en tanto las acciones se encuentran relativamente incoordinadas; pero, con los progresos de esta coordinación, su importancia se desvanece y se los podrá reemplazar por elementos cada vez más simbólicos. En consecuencia, es necesario distinguir cuidadosamente esta clase de experiencia funcional que se ejerce sobre "objetos cualesquiera" (en el sentido en que Gonseth caracterizó uno de los aspectos de la lógica) de la experiencia material que se ejerce sobre las propiedades físicas de los objetos particulares.

Por lo tanto, a partir de estas pocas observaciones preliminares puede concluirse que el número no puede explicarse por la simple concepción de "experiencias mentales" en general. Si se distingue entre ellas las que vuelven a esbozar las "variaciones de los hechos" (I) y aquellas que reproducen en el pensamiento las acciones como tales (II), el número deriva de estas últimas; pero el verdadero problema consiste entonces en comprender el pasaje de la acción a la operación. El hecho primero, desde el punto de vista genético (y ello es verdadero para el espacio —e incluso, en parte, para el tiempo— como para el número) no es la toma de conciencia de la actividad propia, sino esta actividad en tanto organización progresiva y modificación del objeto por el sujeto. En el caso del número —como en el caso de los conceptos lógicos y espaciales que se constituyen en estrecha relación con él—, estas acciones elementales consisten, en primer lugar en reunir o separar, en ordenar o en cambiar el orden, etc.; en resumen, en construir o en deshacer conjuntos determinados. Se trata entonces de descubrir los caracteres epistemológicos de estas acciones iniciales que se encuentran aún muy alejadas de la operación racional y de captar el proceso que conduce a estas últimas:

1º Una acción siempre es solidaria de acciones anteriores, y lo es de manera gradual hasta los reflejos iniciales y los montajes hereditarios (que tienen a su vez una historia biológica que regresa al infinito). Toda acción consiste pues, en primer lugar, en asimilar el objeto, sobre el que ella se ejerce, a un *esquema de asimilación* constituido por las acciones anteriores en su continuidad con el acto actual.[6] Existe así un esquema de reunir, separar, etc., y la acción es, en primer lugar, asimilación del objeto a estos esquemas, de modo semejante a como el juicio asimila el objeto a conceptos, es decir a esquemas operatorios. Por lo tanto, la acción es necesariamente relativa a un sujeto que actúa, así como el pensamiento es relativo a un sujeto que piensa. Sin embargo y por otra parte, la acción es también relativa a su objeto, es decir que en cada nueva situación el

[6] Véase para el detalle nuestra obra sobre *La naissance de l'intelligence chez l'enfant*. Delachaux et Niestlé. [Hay versión castellana: *El nacimiento de la inteligencia en el niño*. Madrid, Aguilar, 1969.]

esquema de la acción se diferencia por el objeto al cual se aplica y esta modificación puede ser además momentánea y ocasional o constante. Diremos así que la acción es, en segundo lugar, *acomodación* al objeto, es decir, relativa a su objeto y no sólo al sujeto. Ahora bien, esta asimilación y esta acomodación son indisociables entre sí, y no se puede concebir una acción que no presente estos dos polos; pero puede existir entre ambas tendencias así polarizadas diversas formas de equilibrio. En el punto de partida, este equilibrio es inestable porque la asimilación es conservadora; en cambio, la acomodación expresa las modificaciones cuya continua renovación por parte del objeto debe padecer el sujeto.

2º Cuando se pasa luego de la acción sensoriomotriz a la acción interiorizada constituida por la representación intuitiva, el equilibrio entre asimilación y acomodación tiende a estabilizarse por el efecto de los siguientes factores. Por el juego de las significaciones evocadas mentalmente, la asimilación deja de ser inmediata y supera la acción del momento y se extiende a mayores distancias espacio-temporales, es decir que se prolonga a través de los juicios. Por más compleja que sea la filiación psicológica de la asimilación representativa respecto de la de la acción, la continuidad epistemológica resulta así evidente. En cuanto a la acomodación, también se interioriza, pero en forma de significantes imaginados: la imagen mental, símbolo del objeto, es la resultante de una especie de imitación interior que, como la imitación misma, prolonga la acomodación.[7] Esta doble interiorización hace pues posible un equilibrio más extenso y más duradero entre la asimilación y la acomodación, pero imperfecto aún, puesto que estas dos tendencias siguen orientándose en direcciones divergentes: una de conservación y la otra de cambio. No por ello el pensamiento intuitivo y las experiencias mentales elementales dejan de constituir sistemas cada vez mejor articulados de acciones realizadas en pensamiento, imaginando, por una parte, la realidad percibida (acomodación imitativa) y asimilándola, por la otra, a sus esquemas interiorizados. Sin embargo, Mach y Rignano, sólo insistieron sobre el elemento de acomodación a lo real —lo cual explica su empirismo— sin ver que necesariamente esa acomodación viene acompañada de una asimilación a los esquemas de acción, es decir, a una actividad por parte del sujeto (por más que aún no sea de carácter operatorio).

3º En tercer lugar, aparece la operación concreta. La operación es también —y siempre lo será— una acción, ya sea efectiva como en (1), o mental como en (2). Sin embargo, presenta dos clases de novedades, por otra parte solidarias respecto de las acciones precedentes. En primer lugar, es reversible; en cambio, la acción inicial es irreversible. Toda la psicología del niño muestra cuán lenta es esta conquista de la reversibilidad, hasta el mo-

[7] Véase nuestra obra acerca de *La formation du symbole chez l'enfant*. Delachaux et Niestlé, 1945. [Hay versión castellana: *La formación del símbolo en el niño*. México, Fondo de Cultura, 1962.]

mento en que sea necesario concebir el vínculo de la acción inversa con la directa: invertir un orden, separar en oposición a reunir, etc. Se presenta entonces el segundo carácter de la operación: nunca se trata de una acción única, sino de acciones coordinadas con otras acciones y esta composición entre acciones sucesivas se torna coherente por su misma reversibilidad. En efecto, esta reversibilidad y esta coordinación no son otra cosa que la expresión del equilibrio, por fin alcanzado, entre la asimilación y la acomodación: coordinar las acciones de modo reversible es poder acomodar simultáneamente los esquemas a todas las transformaciones y asimilar cada transformación con cada una de las restantes por intermedio del esquema de las acciones que las provocan. Sin embargo, las primeras operaciones siguen siendo concretas porque están aún relacionadas con manipuleos efectivos o mentales.

4º Por último, al término de la organización de las operaciones concretas, se hacen posibles las operaciones abstractas o formales, cuyo carácter consiste en descansar sobre puras asunciones y ya no sobre realidades manipuleables: en efecto, estas nuevas operaciones se realizan sobre proposiciones que describen las operaciones concretas y ya no sobre los objetos de estas operaciones. Se constituye así finalmente una lógica de las proposiciones, susceptible de aplicarse a varios sistemas operatorios a la vez. Resulta claro que, psicológicamente, cada proposición constituye además una acción que puede coordinarse y que es reversible, pero puramente simbólica e hipotética. De este modo, se completa la continuidad desde la acción inicial al sistema de las proposiciones hipotético-deductivas.

Volvamos al número entero y observaremos que es ilusorio querer explicarlo mediante experiencias, incluso mentales, interpretadas empíricamente. Sin duda alguna es la expresión de acciones, pero estas acciones son, desde el comienzo, asimilación del objeto al sujeto tanto como acomodación del sujeto al objeto. Entonces no se podrán explicar las operaciones finales —que constituyen el número— si no se recurre a esta actividad asimiladora; incluso será necesario, para restituir a las operaciones numéricas la propiedad de composición reversible, seguir etapa por etapa el equilibrio progresivo que se establece entre la asimilación y la acomodación cada vez mejor diferenciadas. La experiencia que interviene durante los primeros estadios de este desarrollo no habla pues, cuando se la interpreta desde el punto de vista psicológico, en favor del empirismo, sino en favor de una actividad operatoria (lo cual no es en absoluto lo mismo): esta actividad operatoria se anuncia desde las formas activas e intuitivas más primitivas del número y sólo se realiza plenamente en los sistemas de operaciones, en primer lugar, concretas y luego formales y susceptibles de ser axiomatizadas.

2. Las teorías empíricas del número. B. La explicación del número ordinal por la experiencia interior de los estados de conciencia (Helmholtz). La crítica que acabamos de hacer acerca de la explicación del número por la experiencia mental culmina en el siguiente

resultado: el número no es abstraído de los objetos o la realidad de la experiencia, sino de las acciones mismas que intervienen en la experiencia (efectiva o mental) y la tornan posible. ¿No afirmamos con ello que el número tiene un origen empírico, pero interno y ya no externo? Y la abstracción a partir de las acciones ¿no tiene las mismas propiedades que la abstracción a partir de los objetos, con la única diferencia de que el objeto de experiencia, a partir del cual se extraen por abstracción los elementos del número, sería el sujeto mismo, directamente consciente de su propia realidad empírica? La discusión de la teoría de Helmholtz nos proporcionará la doble ocasión de examinar la idea epistemológica de experiencia interior —en sus relaciones con el punto de vista de las operaciones— y distinguir los dos tipos de abstracciones en cuanto a su mecanismo operatorio.

Sabemos que, en su pequeño tratado *Contar y medir*, Helmholtz intentó mostrar que el punto de partida del número se sitúa en la intuición mnésica del orden de sucesión temporal de nuestros estados de conciencia: "contar es un procedimiento que descansa en nuestra facultad de recordar el orden de sucesión de nuestros estados de conciencia".[8] En otros términos, los estados de conciencia que se suceden en el tiempo según un desarrollo irreversible constituyen, de por sí, una serie cuya "intuición interna" es proporcionada por la memoria. Basta entonces "numerar", mediante un procedimiento verbal convencional, los términos de esta sèrie para obtener una sucesión de "números de orden" que permiten definir la suma ordinal por su simple sucesión y la igualdad de los dos números ordinales. Basada en el empirismo de la experiencia interna, la concepción de Helmholtz se duplica pues con una especie de convencionalismo en cuanto a cómo se traduce la serie temporal en una sucesión de "signos" vinculados a través de una operación que les otorga el valor de unidades (ordinales) homogéneas.

Deben analizarse entonces tres aspectos de la teoría de Helmholtz: la hipótesis según la cual la forma inicial del número es ordinal, el convencionalismo de la numeración y el empirismo de las fuentes.

Resulta inútil insistir desde ahora sobre la precariedad de las teorías ordinales. Por una parte, L. Brunschvicg mostró de modo decisivo[9] que, en lo finito, la ordinación supone la cardinación y viceversa: si las unidades sucesivas son rigurosamente homogéneas, sólo puede distinguirse su orden de sucesión cuando se las refiere a los conjuntos formados por esta misma sucesión ($1 + 1 + 1$ no difiere, por ejemplo, de $1 + 1$ si no es porque hay dos números enumerados antes del último en vez de uno solo); inversamente, los conjuntos cardinales no pueden evaluarse salvo que se los ordene, si es que se quiere tener la certeza de no haber contado dos veces el mismo término. Por otra parte, la génesis psicológica del número en el niño, confirma de modo sorprendente esta interdependencia de los dos aspectos —ordinal y cardinal— mostrando que el número presupone la

[8] Traducido y citado por A. Spaier: *La pensée et la quantité*, pág. 84.
[9] L. Brunschvicg: *Les étapes de la philosophie mathématique*. París, PUF.

fusión de las operaciones de encaje y clases (aspecto cardinal) y la seriación (aspecto ordinal). Examinaremos este aspecto en el punto 6. Por lo tanto, porque carecía de un análisis genético de las operaciones espontáneas, Helmholtz se limitó a insistir sobre el aspecto ordinal, a través de una reconstitución psicológica artificial.

En cuanto al convencionalismo de Helmholtz —como se lo ha llamado a menudo— es la resultante de la misma causa. Para colmar el abismo que separa la sucesión cualitativa de los estados de conciencia, con o sin memoria, de la sucesión de los números enteros, era necesario en efecto intercalar un conjunto de operaciones: como Helmholtz no investigó genéticamente las que se desarrollan en el niño cuando construye el concepto de número, reemplazó estas operaciones espontáneas por un conjunto de operaciones convencionales de los signos de la numeración.

Al fin de cuentas, las dificultades de la teoría de Helmholtz son el resultado del punto de partida que ha elegido, es decir, de su hipótesis según la cual el número puede extraerse de la experiencia interior. Ahora bien, este error es tanto más significativo en la medida que ha quedado asociado con un nombre célebre y que la ilusión de un parentesco genético directo entre el número y el tiempo fue compartida por cierta cantidad de otros grandes pensadores, empezando por Kant y terminando por Brouwer.

La hipótesis, sugerida por el hecho de que el tiempo, así como el número, constituye una serie lineal, sedujo sin duda a estos autores porque al fundamentar el número sobre el tiempo se creía otorgarle así una base más sólida, puesto que la duración interior parece ser objeto de una intuición mucho más directa que el conocimiento del espacio o de un orden de sucesión simplemente espacial. Ahora bien, por una parte, no hay nada que pruebe que la intuición de la duración interna sea más primitiva que la del tiempo físico, ya que el bebé observa muy probablemente la anterioridad de los medios sobre los fines (por ejemplo, tirar de una frazada para alcanzar el objeto colocado encima de ella) mucho antes que la sucesión de sus estados de conciencia, puesto que carece de memoria de evocación. Por otra parte, la memoria es mucho más una reconstrucción activa, y en parte operatoria, que un registro automático y en particular automáticamente ordenado: para ordenar nuestros recuerdos nosotros mismos estamos obligados a colocar este orden. La intuición de la duración no conduce pues a una concepción distinta del orden temporal salvo en la medida en que superpongan a esta intuición operaciones de seriación propiamente dichas (vol. II, cap. I, punto 3). La construcción de la sucesión temporal sólo culmina, aun en el niño, después de la construcción de las operaciones numéricas, o en todo caso al mismo tiempo, pero nunca antes.[10]

En resumen, al querer extraer de la experiencia interior el número

[10] Véase, para la demostración, nuestra obra acerca de *Le développement de la notion de temps chez l'enfant*. París, PUF, 1946.

ordinal, o incluso simplemente la idea de sucesión ordenada, nos enfrentamos exactamente con la misma dificultad que cuando queremos extraerlos de la experiencia externa: la operación de la seriación cualitativa y a fortiori la de la numeración ordinal no están dadas en la experiencia, ni interna ni externa. Estas operaciones se suman a la experiencia, así como una acción se aplica a objetos, sean éstos objetos del recuerdo o de la conciencia actual, pero si bien estructuran la experiencia directa no por ello derivan de ella así sin más.

¿De dónde proviene entonces una operación como aquella que consiste en seriar objetos materiales o acontecimientos recordados, si no es de cierto tipo de experiencia interna? Sin embargo, precisamente aquí la psicología de la conducta, o de la acción, ha renovado la de la conciencia. La operación deriva de la acción, pero la acción es una realidad más profunda que la experiencia interior que es susceptible de generar, ya que esta experiencia siempre es una toma de conciencia más o menos inadecuada de la acción como tal. Por lo tanto, no hay que recurrir a la experiencia interior —a ningún estadio de su desarrollo— sino a ese desarrollo mismo de las acciones y, en particular, al pasaje gradual de la acción mentalizada a las operaciones.

Ahora bien, para retomar el ejemplo de Helmholtz, es perfectamente legítimo asemejar la construcción de una sucesión ordenada (una vez reconocido el carácter operatorio de esta construcción en oposición a los caracteres vividos o simplemente representados), con las conductas con las cuales ordenamos nuestros recuerdos (una vez reconocido también el carácter activo de la memoria que se asemeja a la reconstitución del pasado por parte del historiador, o a lo que P. Janet ha llamado la "conducta del relato"). Sin embargo, para extraer una operación de carácter relativamente superior (la seriación operatoria sólo aparece en el niño alrededor de los 7 años) a partir de una conducta algo inferior (la memoria de evocación se inicia sin duda con el lenguaje), es necesario recurrir a una abstracción *sui generis*, que es precisamente la abstracción a partir de las acciones, opuesta a la abstracción a partir de los objetos, según la distinción que anunciábamos al comienzo de este punto 3. Así, la construcción de una sucesión ordenada es una operación que puede abstraer sus componentes, no sólo de la memoria, sino también del orden de los movimientos en una sucesión de gestos, etc.; en resumen, de todo orden que intervenga en conductas inferiores. Pero se trata de una abstracción cuyo mecanismo es necesario precisar.

La equivocación de las explicaciones por la experiencia interior consiste en creer que se puede abstraer un carácter tomado de una intuición o una percepción interna (por ejemplo, una intuición de duración o una sensación cinestésica) para insertarla directamente en una conducta superior, tal como una operación, a la manera como se abstrae de la experiencia exterior una cualidad cualquiera, por ejemplo la blancura de diferentes objetos, para construir una clase general: la de los objetos blancos. Ahora bien, en realidad se trata de dos formas de abstracción muy diferentes y es importante insistir en ello desde el comienzo de esta obra, porque este

problema ha de encontrarse nuevamente en todos los problemas epistemológicos particulares (los del espacio, el tiempo, la fuerza, etc.), y este desconocimiento parece ser el culpable del hecho de que se hayan falseado cierta cantidad de teorías fundadas en consideraciones psicogenéticas como por ejemplo la de F. Enriques (*Introducción*, punto 3).

Recordemos las principales etapas distinguidas en el punto 1 y que conducen de la acción a la operación: acción sensoriomotriz, pensamiento intuitivo, operaciones concretas y operaciones formales. En el caso de la construcción de una sucesión ordenada, pueden designarse en cada uno de estos estadios conductas que preparan o culminan esta construcción. En el nivel sensoriomotor ya existen así ciertos esquemas de sucesión práctica (por ejemplo, ejecutar un movimiento antes que otro y siempre en el mismo orden). En el plano de la intuición imaginada se encuentran otros (por ejemplo, el orden de ciertos recuerdos), en el plano de las operaciones concretas también (por ejemplo, ordenar objetos por sus alturas o pesos). Por último, existen esquemas de sucesión formales (por ejemplo, ordenar una sucesión de elementos abstractos). Cada uno de estos estadios se caracteriza además, como hemos visto en el punto 1, por un equilibrio superior al del precedente, por una mayor reversibilidad y por composiciones cada vez más generales. Resulta pues evidente que cada tipo de esquema toma del tipo anterior algunos elementos, así generalizados, por ejemplo y precisamente cierta forma de sucesión. Este préstamo constituye la abstracción a partir de la acción, y vemos que es real si se tiene cuidado en seguirlo de manera progresiva y no saltando directamente desde las conductas elementales a los niveles superiores. ¿En qué difiere entonces esta abstracción de la abstracción de las cualidades de los objetos que interviene en la construcción de un concepto a partir de la experiencia externa?

La diferencia esencial es que, en el caso de la experiencia externa, la cualidad abstracta del objeto ya se reconoce en el objeto, en su misma forma, anteriormente a su abstracción: la abstracción de la blancura, por ejemplo, culmina en el nuevo resultado de permitir la comparación entre varios objetos diferentes (por ejemplo, en la constitución de una especie química o biológica), pero esta blancura era ya reconocida como tal en cada uno de estos objetos antes de realizar esta abstracción. Hablamos naturalmente de una cualidad física, es decir, impuesta al sujeto por la percepción de los objetos mismos, y no de un carácter añadido a los objetos por la acción que se ejerce sobre esa cualidad, por ejemplo la constitución de tal número. Ahora bien, en oposición a esta abstracción de las cualidades físicas, la abstracción de un carácter mental que califique este esquema de acción está destinada a hacer que este carácter entre en un esquema más complejo (y no en un simple concepto descriptivo de la experiencia interior); se trata de una *abstracción reflexionante*, es decir que transforma la conducta diferenciándola y, en consecuencia, añade algo a la cualidad aislada de este modo por la abstracción. Por ejemplo, la sucesión práctica

—presente en una conducta sensoriomotriz— no necesariamente es el objeto de una toma de conciencia por parte del sujeto al nivel considerado: abstraerla de su contexto de acción la transformará, en consecuencia, en una sucesión representada, y ya no simplemente vivida, lo cual supone la construcción de un nuevo esquema que pertenece a un nivel superior (al nivel del pensamiento intuitivo si se trata, por ejemplo, de una reconstrucción mnésica de esta sucesión). Una nueva abstracción la transformará en operación propiamente dicha, si se trata de una sucesión que puede invertirse o reproducirse a voluntad (y no solamente en ciertos contextos representativos de conjunto), etc. Asimismo la abstracción de una sucesión construida por operaciones concretas en una sucesión formal supone una reconstrucción de esta sucesión bajo la forma de proposiciones. Por ello, esta sucesión de abstracciones (con pasaje de lo sensoriomotor a lo intuitivo, y desde allí a las operaciones concretas más formales) se escalona entre los 1 y 12 años, o sea durante toda la duración del desarrollo mental.

En resumen, la abstracción a partir de la acción necesariamente es constructiva porque es reflexionante. No conduce a una generalización simple como la abstracción de las cualidades físicas cuando está destinada únicamente a la construcción de una clase general o una relación generalizada (de una ley comprobada): es constructiva en tanto se relaciona con la elaboración de una nueva acción de tipo superior a aquella a partir de la cual se ha abstraído el carácter considerado. Por lo tanto es, en su esencia, *diferenciación* y culmina en una generalización que es una nueva composición, preoperatoria y operatoria, puesto que se trata de un nuevo esquema elaborado por medio de los elementos tomados a los esquemas anteriores por diferenciación, y de un esquema más móvil y más reversible, en consecuencia, más equilibrado.[11]

A través de estas observaciones, vemos en qué sentido una explicación psicogenética no puede reducirse a un simple recurso a la experiencia interior. Por no haber percibido el papel de las operaciones reales que conducen a la seriación, y desde ahí a la construcción efectiva del número, Helmholtz tuvo que remediar las lagunas de su empirismo interno recurriendo a operaciones hipotéticas, interesantes desde el punto de vista axiomático pero extrañas a la explicación genética, puesto que la reconstitución verdadera del número supondría que las operaciones a las que se recurre fuesen las del sujeto actuante. Ahora bien, ellas existen y bastan para mostrar que el sujeto construye activamente los conceptos y que ellos no aparecen totalmente dados en su conciencia. La experiencia interior sólo sería la fuente real de los conocimientos si se formulara la hipótesis de conceptos preformados, dados de modo innato y de los cuales el sujeto adquiriría directamente conciencia en un momento determinado de su desarrollo. Ahora bien, acabamos de comprobar que cuando el sujeto

[11] Por supuesto, estas abstracciones pueden existir también en el dominio físico, pero referidas a las transformaciones de los objetos y no únicamente a sus cualidades. Sólo que se trata entonces de generalizaciones por composición matemática, es decir, precisamente por asimilación a las generalizaciones operatorias provenientes de las acciones mentales del sujeto.

abstrae, a través de una toma de conciencia reflexionante, algún elemento a partir de sus conductas anteriores (incluidos sus reflejos hereditarios), esta reflexión es constructiva y no se contenta con trasponer de un plano a otro esquemas totalmente elaborados, sino que los extiende reconstruyéndolos por su mismo descubrimiento. La abstracción a partir de la acción constituye pues la fuente de nuevas acciones, cuya culminación está constituida por las operaciones mismas. Ahora debemos estudiar este pasaje de la acción a la operación.

3. Cualidad y cantidad. Los "agrupamientos" específicos de las operaciones elementales. En su estudio demasiado breve acerca de "la fabricación del número,[12] H. Delacroix escribió —pero sin sostener sin embargo que el número era una pura cualidad—: "el número está formado por elementos exclusivamente cualitativos, y toda su materia es cualidad" (pág. 141). En cambio, Alb. Spaier llegó a afirmar [13] que el "número es un concepto cualitativo" (pág. 125) y concebir la cantidad misma como "el resultado de la medición" (pág. 33), es decir, como la "cualidad medida" (pág. 33), siendo la medición, por otra parte, la aplicación del número a la cualidad... Se gira así dentro de un círculo ya que la cantidad es la cualidad medida gracias a la cualidad misma. En cuanto a los matemáticos oponen, como sabemos, los conceptos numéricos y métricos a los conceptos cualitativos y distinguen, en particular, la geometría cualitativa de la geometría métrica. Sin embargo, se plantea el problema de saber si este cualitativo matemático tiene las mismas propiedades que lo cualitativo simplemente lógico.

Por lo tanto, nada más equívoco en la terminología corriente que los términos de cualidad y cantidad, y las exageraciones de Spaier muestran hasta dónde pueden conducir estas anfibologías, puesto que el número mismo —del cual se estará de acuerdo sin embargo en considerar que constituye la cantidad por excelencia— termina por ser concebido como una pura cualidad. Por ello nos parece indispensable, para analizar la significación epistemológica del número, comenzar por encontrar algunos criterios de delimitación.

En realidad, la cualidad y la cantidad son inseparables, y ello tanto desde el punto de vista genético como desde el punto de vista del análisis lógico o axiomático. Por otra parte, los mismos argumentos que culminan en la suposición de que todo es cualidad podrían conducir a la afirmación de la generalidad de la cantidad, ya que si se consigue extraer sin más la cantidad de la cualidad, evidentemente es porque ella está contenida allí desde el comienzo. Unicamente la imprecisión de un lenguaje filosófico insuficientemente formalizado consigue oscurecer este hecho evidente; en cambio, los métodos genéticos o lógicos deben permitir ambos las caracterizaciones necesarias.

[12] Dumas: *Traité de psychologie*, t. v, 1936, 2ª ed. [Hay versión castellana: *Tratado de psicología*. Buenos Aires, Kapelusz, 1962.]

[13] A. Spaier: *La pensée et la quantité*. Paris, PUF.

Pero afirmar que la cualidad y la cantidad son indisociables no significa en absoluto que sean idénticas: simplemente son tan primitivas una como la otra, desde el punto de vista genético y culminan, en su estado de equilibrio operatorio, en una forma de solidaridad tal que no podría definirse una sin recurrir a la otra.

Desde el punto de vista genético, ambas son primitivas porque, desde la acción sensoriomotriz, se presentan de modo interdependiente. Por ejemplo, reunir objetos semejantes es una acción que consiste en introducir cierta cualificación (asimilación por semejanza), pero reunir más o menos es una cuantificación de esta acción: en un esquema de asimilación sensoriomotriz ya pueden distinguirse pues una extensión que implica la cantidad y una comprensión que se apoya en la cualidad. Asimismo, sacudir un objeto es una acción que se caracteriza por cierta cualidad, pero podemos sacudirlo en mayor o menor grado (más o menos rápidamente, más o menos intensamente, etc.), y estas diversas intensidades de la acción constituyen cantidades inherentes a las relaciones asimétricas. Se responderá que dos acciones distintas por sus intensidades son cualidades diferentes: aceptémoslo, pero la relación de estas cualidades entre sí es precisamente una cantidad.

Por lo tanto, podemos suponer que existe, entre la cualidad y la cantidad, una relación de dependencia mutua semejante a la que corresponde a la comprensión y la extensión de los conceptos lógicos. En efecto, es imposible concebir la comprensión de un concepto sin referirse a los términos que constituyen el soporte de los caracteres que definen esta comprensión; ahora bien, estos términos no son otros sino la extensión del concepto en cuestión. Sin embargo e inversamente, es imposible delimitar esta extensión sin hacer referencia a los caracteres de los términos que abarca, es decir, sin apoyarse en la comprensión. Ahora bien, esta indisociable solidaridad entre la comprensión y la extensión de los conceptos interesa tanto más directamente a las relaciones entre lo cualitativo y lo cuantitativo, en la medida en que las formas más elementales de la cualidad y la cantidad se confunden precisamente con la comprensión y extensión lógicas.

En efecto, pueden caracterizarse del siguiente modo la cualidad y la cantidad, según que uno se coloque desde el punto de vista de las clases o las relaciones. En lo que se refiere a las clases, resulta claro que la cualidad corresponde a la comprensión del concepto y la cantidad a su extensión. El sistema de los encajes que determinan las clases en su extensión constituye pues esencialmente un sistema cuantitativo, en oposición a los atributos o los predicados (es decir, a las propiedades que no se refieren al "todo" o a "algún" objeto) que enuncian las cualidades así cuantificadas. En cuanto a las relaciones (en otra parte hemos mostrado [14] que todos los predicados en comprensión constituyen sin duda relaciones, aun cuando se les enuncie en forma absoluta y se los atribuya a un solo objeto [x es "blanco" significa por ejemplo que tiene "el mismo color que" los objetos

[14] *Traité de logique*, puntos 4-5.

y y *z*]), hay que distinguir igualmente su extensión y su comprensión. Ahora bien, la extensión de una relación, es decir, los términos que ella relaciona (dominio, codominio o campo) no es otra cosa sino una clase, ordenada o no; independientemente de su orden eventual que corresponde (en tanto orden) a la comprensión; esta clase caracteriza pues nuevamente una cantidad que puede definirse por su extensión. En cuanto a la comprensión de la relación, hay que distinguir dos casos: las relaciones simétricas y las relaciones asimétricas. Las relaciones simétricas expresan una equivalencia (por ejemplo A es "tan blanco como" B), una semejanza (por ejemplo A es "análogo" a B), o una diferencia no ordenada (por ejemplo A "difiere" de B). Las relaciones simétricas traducen pues la común pertenencia a una misma clase (de términos semejantes), o una "alteridad", o la no pertenencia a la misma clase (A es de otra clase que B). En ambos casos, las extensiones de estas clases determinan cantidades: en cambio, la cualidad corresponde a la comprensión de la relación como tal (semejanza o diferencia simétrica). En cuanto a las relaciones asimétricas, expresan las diferencias ordenadas, bivalentes (A come a B), trivalentes (exterior, interior o sobre la frontera), o plurivalentes (A es más pequeño que B, B es más pequeño que C, etc.). Su cualidad se constituye pues nuevamente por la comprensión de la relación (por ejemplo, ancho, rojo, virtuoso, etc.) y su cantidad por la extensión de la clase correspondiente ordenada. Sin embargo, en el caso de las relaciones multivalentes, se podría decir que la cantidad está también determinada por la diferencia, puesto que estas relaciones implican lo "más" y lo "menos" ("más" o "menos" ancho, rojo, virtuoso, etc.). Sin embargo, hay que distinguir dos cosas. Decir que A es "más" (ancho, rojo, etc.) que B, es expresar una diferencia de cualidad, en la medida en que el "más" y el "menos" se refieren a un atributo en comprensión. Sólo cuando uno se refiere a la sucesión (o seriación) en extensión interviene la cantidad, en tanto intervalo (o segmento) más o menos grande entre O y A, O y B, O y C, o entre A y B, A y C, etc. Así la cantidad expresada por las diferencias ordenadas de las relaciones asimétricas multivalentes se relaciona con la que traduce la extensión de las clases.

En efecto, por una parte, las desigualdades de extensión entre clases (como las relaciones de inclusión en el caso de las clases encajadas) son relaciones asimétricas, entre otras, y las diferencias de extensión están así comprendidas en las relaciones de diferencia ordenada en general; por la otra, si se ordenan elementos según una sucesión de iguales relaciones asimétricas multivalentes, habrá tantos más términos intercalares entre dos elementos dados cuanto mayor sea la diferencia entre estos últimos, lo cual reduce recíprocamente los intervalos o segmentos, que expresan las diferencias, a relaciones de extensión (es decir al "campo" más o menos extenso de las relaciones consideradas).[15]

[15] Por ejemplo, si A es menos rojo que B; si B es menos rojo que C y si C es menos rojo que D, entonces hay más diferencia entre A y D que entre A y C; o entre A y C que entre A y B; en consecuencia, la clase ABCD tiene más extensión que la clase ABC, y ésta más extensión que la clase AB.

Comprobamos ahora que las relaciones de extensión (o diferencia ordenada) pueden presentarse en tres formas distintas; una caracteriza a la simple lógica de las clases y las relaciones, y las dos restantes a la matemática. Se trata de tres formas que corresponden a lo que habitualmente se designa con los vocablos imprecisos de relaciones "cualitativas" o "cuantitativas", cuando en realidad se trata de tres formas distintas de cantidad, pero que consisten las tres en relaciones de extensión entre conjuntos de términos calificados.

1. Supongamos, para precisar las ideas, dos clases A y B definidas por la sola cualidad de los elementos que reúnen y tales que todos los individuos de A formen también parte de B, pero sin que la recíproca sea verdadera (por ejemplo todos los mamíferos A son vertebrados B, pero todos los vertebrados B no son mamíferos A). Esta relación de inclusión, de parte a todo, constituye por su transitividad el fundamento del silogismo cualitativo, ya que si todos los B son C, entonces todos los A también son C. Comprobamos además que como no todos los B son A, y no todos los C son B, existe entonces una clase A', complementaria de A, en B, tal que A' = B — A (por ejemplo, A' = los vertebrados, B no mamíferos A) y una clase B', complementaria de B en C, tal que B' = C — B (por ejemplo, si C = los animales, entonces B' = los animales no vertebrados), etcétera.

Aclarado esto, podemos definir, gracias a estas simples relaciones de extensión, una primera forma de cantidad o magnitud que llamaremos según la terminología kantiana la *cantidad intensiva*.[16] Diremos que una relación cuantitativa es de orden intensivo si solamente sabemos que el todo es más grande que la parte B > A o C > B, etc., pero sin poder determinar si una de las partes del todo, por ejemplo A, es más grande, más pequeña o igual en relación con la parte complementaria A'. En efecto, los juicios "todos los A son B" pero "todos los B no son A" siguen siendo verdaderos sean cuales fueren las cantidades de individuos presentes en A y en A': si sólo existe un A y un número tan grande como se quiera de A', o al revés, siempre se seguirá teniendo A < B, independientemente de las relaciones entre A y A'. Sucede lo mismo entre B y B' respecto de B < C. Por ello, la lógica de las clases sólo conoce las cantidades: uno,[17] todos, algunos y ninguno ("un A es algún B", "todos los A son algunos B" y "ningún A es algún A').

Sucede exactamente lo mismo con las relaciones asimétricas cuando se las define únicamente por las cualidades de los términos seriados y expresan así, como se ha visto, su diferencia de cualidad. Sea por ejemplo, la relación *a* = "A es más liviano que B", y la relación *a'* definida por

[16] Concepto que Spaier declara "confuso" (*loc. cit.*, pág. 15) porque él mismo confunde todas las formas de cantidad y pretende "medir" todas las cualidades, incluidas las sensaciones y le reprocha a Fechner el no haberse atrevido a medir estas sensaciones como no fuera indirectamente (pág. 15).

[17] "Uno" en el sentido de la identidad, es decir, de la clase cuyos elementos son idénticos (= clase singular).

"B es más liviano que C". De estas dos relaciones *a* y *a'*, puede extraerse la relación *b* (= A es más liviano que C) reuniendo *a* y *a'* bajo la forma serial $a + a' = b$ (así como puede proseguirse la serie por medio de la relación b' = "C es más liviano que D", de donde $b + b' = c$, y la relación *c* significa entonces "A es más liviano que D", etc.). Pero entonces simplemente sabemos que existe una mayor diferencia de peso entre A y C que entre A y B, o que entre B y C, o sea $b > a$ y $b > a'$. En cambio, no se puede determinar si existe una mayor diferencia entre A y B que entre B y C: no se sabe, por lo tanto, nada acerca de las relaciones entre las relaciones parciales *a* y *a'* y sólo se conoce la relación entre una relación parcial *a* o *a'* y la relación total *b* (o *c*, etc.) en la cual está encajada.[18]

II. Supongamos ahora que se introduzca una nueva relación cuantitativa entre las partes complementarias de un mismo todo, entre las clases A y A' para la clase B, o entre las relaciones *a* y *a'* para la relación *b*. Esta especificación de las relaciones de extensión entre las partes marca el pasaje de la cantidad intensiva a la *cantidad extensiva*, es decir, de la lógica de las clases y las relaciones cualitativas a la matemática propiamente dicha. Esta cantidad extensiva puede presentarse bajo dos aspectos, uno métrico y el otro no métrico. Hay que comprender bien la presencia de estas dos posibilidades ya que ellas corresponden precisamente a la distinción que establece la matemática entre lo que llaman el dominio numérico o "métrico" y el dominio "cualitativo"; la geometría llamada "cualitativa" es de carácter "extensivo" y no simplemente "intensivo", pero sigue siendo extraña a la métrica, es decir, a la introducción del número.

Tomemos por ejemplo una sucesión de intervalos encajados que convergen hacia un punto límite; cada uno de estos intervalos es entonces más pequeño que el precedente. En el lenguaje de la teoría de los conjuntos, se dirá que un intervalo contiene "casi todos" los elementos de un conjunto cuando los comprende "todos excepto un conjunto levemente representado" (o también "todos excepto una cantidad finita"). La sucesión de los intervalos convergentes constituye pues una sucesión de relaciones "casi todos". Ahora bien, vemos inmediatamente que la relación "casi todos", que no necesita la intervención de la enumeración, puede sin embargo reducirse a la simple cantidad intensiva: si A contiene "casi todos" los elementos de B, sabemos entonces, no sólo que A < B, sino además que A > A' (si B = A + A'). Incluso en el lenguaje corriente, si decimos por ejemplo que "casi todos los mamíferos (A) son terrestres (B)", introducimos más que una relación lógica y recurrimos a una cuantificación ya matemática: la lógica pura se limita a decidir entre "todos" y "algunos", pero no tiene nada que hacer con esa relación intermedia, la cual constituye en realidad una fracción, —pero de carácter indeterminado (incluida entre > 1/2 y < 1/1)— y, por lo tanto, extensiva.

[18] Ahora bien, como la relación "A es más liviano que B" puede a su vez subdividirse, con la introducción de nuevos términos entre A y B, en relaciones de orden inferior que presentan los mismos caracteres de composición, tiene un carácter intensivo: lo "más" que interviene en la relación "más liviano" es pues una cantidad intensiva en ausencia de nuevas especificaciones.

Asimismo las relaciones llamadas cualitativas que se emplean en la geometría proyectiva, en la geometría afín y en la geometría de las similitudes (cuando las relaciones sin armonía, las afinidades, las proporciones, etc., se construyen según métodos puramente gráficos sin expresión métrica alguna) corresponden a la cantidad extensiva, aunque no métrica, ya que las partes de un mismo todo se comparan siempre entre sí y no simplemente en relación con este todo, como sucede en la lógica. Por ejemplo, la disminución de la distancia que separa dos líneas que se pierden en el infinito, es regular y no se presenta de cualquier modo: si designamos con los símbolos A, B, C, etc., las paralelas que marcan la distancia creciente entre las líneas que se pierden en el infinito a partir del punto en que se reúnen en el horizonte, no sólo tenemos una seriación intensiva $A < B < C < D \ldots$ etc., sino también una relación entre las diferencias mismas: A' ($= B - A$), B' ($= C - B$), C' ($= D - C$), etc., de tal modo que las relaciones entre A', B', C', etc., y A, B, C, etc., se mantienen constantes. Esta invariancia —implicada en la construcción gráfica independientemente de toda métrica— aparece, por ejemplo, en cierta edad en el dibujo con perspectiva de los niños y testimonia ya, de por sí, la aparición de cierta cuantificación extensiva.[10]

III. Por último, hablaremos de *cantidad numérica* o *métrica* cuando en un todo B, las partes complementarias A y A' puedan reducirse a una unidad común. Si por ejemplo A puede considerarse como equivalente a A' luego de una operación de correspondencia biunívoca, de sustitución, de congruencia, etc., entonces a partir de esta nueva relación, que escribimos para simplificar $A = A'$, puede extraerse la igualdad $B = 2$ A, lo cual equivale a componer el todo B con la suma de unidades de orden A. La cantidad numérica o métrica debe concebirse entonces como un caso particular de la cantidad extensiva; sin embargo estas dos subespecies son las que se oponen entre sí en la matemática con el nombre de cualitativo y métrico.

Aclarado esto, podemos pues admitir que la cualidad siempre es inseparable de la cantidad y recíprocamente: en lógica, las cualidades se relacionan entre sí por relaciones de cantidad intensiva; en cambio, en matemática, todas estas relaciones son extensivas, ya sean métricas o no métricas.

Ahora bien, estas distinciones elementales tienen gran importancia en cuanto al mecanismo de las operaciones generales del pensamiento y, en particular, en cuanto a su desarrollo genético. Resulta claro, en efecto, que las cantidades intensivas correlativas de la cualidad lógica son más simples que las relaciones de carácter extensivo y métrico, puesto que sólo conocen las relaciones cuantitativas de parte a todo y aún no las de las partes entre sí. Por lo tanto, sobre la construcción de estas primeras relaciones se concentrará todo el esfuerzo del pensamiento en formación; en cambio, una vez elaboradas, estas relaciones se prolongarán sin dificultad

[10] Véase para más detalles Piaget e Inhelder: *La représentation de l'espace chez l'enfant*. París PUF, 1947, cap. VI.

alguna por una generalización de los esquemas constituidos. Asimismo, desde el punto de vista de la jerarquía de las ciencias, hay dominios que no superan el nivel de la cuantificación intensiva —por ejemplo, las clasificaciones botánicas y zoológicas—. Por lo tanto, es esencial, para situar la génesis del número respecto de las operaciones lógicas efectivas, conservar presentes en la mente estas distinciones que corresponden a diferentes etapas genéticas.

En efecto, ¿cuáles son las operaciones elementales de reunión y separación compatibles con una cuantificación simplemente intensiva? Presentan dos caracteres limitativos, notables desde el punto de vista de la psicología del pensamiento, pero bien aptos para sorprender a la matemática habituada a una movilidad generalizadora mucho más extensa:

1º Las composiciones operatorias específicas de la cantidad intensiva sólo pueden ser dicotómicas: si solamente sabemos que todos los A son B sin que sea verdadera la recíproca, entonces los B son A o bien no A (A'), lo cual constituye una primera dicotomía: si solamente sabemos que todos los B son C, sin que sea verdadera la recíproca, entonces los C son B o no B (B'); etc. De donde los encajes de clases $A + A' = B$; $B + B' = C$; $C + C' = D$; etc., que proceden de una sucesión de distinciones dicotómicas, como por ejemplo las de los cuadros sinópticos por medio de los cuales se determina el lugar de una planta en una clasificación botánica.

Ahora bien, la lógica naciente funciona en efecto de este modo: sólo construye clases (o relaciones simétricas) gracias a la presencia o ausencia de una cualidad, y sólo elabora relaciones asimétricas en términos de más y menos, sin unidades ni establecimiento de relaciones entre las partes como tales. Ya se trate de semejanzas (clases o relaciones simétricas) o de diferencias (relaciones asimétricas), la lógica elemental procede pues a través de distinciones dicotómicas, expresiones de las simples comparaciones cuantitativas de parte a todo y no de parte a parte.

2º Las reuniones de las clases entre sí $(A + A' = B)$ —o de las relaciones entre sí $(a + a' = b)$— sólo pueden efectuarse de manera progresiva o en forma contigua, puesto que cada clase —o cada relación— se halla encajada en aquellas que la incluyen sin que se la pueda combinar libremente con otras dejando de lado estos encajes. Así, para establecer la relación de parentesco entre un individuo y otro en un sistema de relaciones genealógicas, hay que remontarse a sus antepasados comunes y combinar todas las relaciones resultantes. Asimismo, en un sistema de clases botánicas o zoológicas como $A + A' = B$ y $B + B' = C$ sólo se puede reunir A y B' en la forma $A + B' = C - A'$; en cambio se puede sumar cualquier número con cualquier otro sin preocuparse en forma alguna por sus encajes.[20]

[20] Acerca de estas limitaciones de la composición de las clases, véase F. Gonseth y Piaget: *Groupements, groupes et lattices*. Arch. de Psychol., XXXI, 1946, y Piaget: *Traité de logique*, Colin, punto 10, núm. III.

No obstante, una vez admitidas estas dos limitaciones —constituidas por la partición dicotómica y las contigüidades— las operaciones de la lógica cualitativa, de cuantificación únicamente intensiva, pueden generar composiciones precisas, estructuras cuyo desarrollo genético resulta relativamente fácil de ser estudiado en el niño a partir de las acciones interiorizadas por el pensamiento intuitivo. Hemos llamado a estas estructuras *agrupamientos*[21] porque son a la vez semejantes a los "grupos" matemáticos elementales (que psicológicamente derivan de ellas) y muy diferentes por causa de estas limitaciones resultantes de la dicotomía y la contigüidad. Una "agrupación" se caracteriza por las siguientes cinco propiedades:

1º Dos operaciones del conjunto constituyen por su reunión una nueva operación del conjunto. Por ejemplo $(A + A' = B) + (B + B' = C) = (A + A' + B' = C)$. Esta fusión de dos operaciones en una sola que, en primer lugar, parece no enseñarnos nada nuevo, constituye sin embargo el fundamento de la transitividad característica de las inclusiones: $(A = B - A') + (B = C - B') = (A = C - B' - A')$ o, por abreviación "Todos los A son B; todos los B son C, entonces todos los A son C", es decir $A < B$; $B < C$, por lo tanto, $A < C$. Esta transitividad es de por sí la expresión de la coordinación psicológica de las operaciones.

2º Cada operación puede invertirse. Por ejemplo, $(A + A' = B)$ corresponde a una inversa, y sólo a una: $(-A - A' = -B)$, de donde puede extraerse $B - A' = A$ o $B - A = A'$. Esta es la expresión de una realidad psicológica fundamental: la reversibilidad de las operaciones que se opone a la irreversibilidad de la acción inmediata.

3º Tres operaciones distintas,[22] compuestas entre sí, son asociativas: $(A + A') + B' = A + (A' + B')$. Esta asociatividad expresa la posibilidad psicológica de obtener el mismo resultado mediante dos caminos diferentes (en este caso particular, la clase C se obtiene tanto de una de estas sucesiones como de la otra).

4º La composición de toda operación con su inversa culmina en una "operación idéntica general" que equivale a la ausencia de operación: $(A + A') + (-A - A') = O$, de donde $X + O = X$.

5º Por último, toda operación compuesta consigo misma o con las operaciones que la incluyen mantiene constantes a estas últimas ("operaciones idénticas especiales"): $A + A = A$ de donde $A + B = B$. Esto es lo que los lógicos llaman la tautología, en oposición a la iteración de las unidades numéricas: $A + A = 2A$.

Se comprueba de este modo que un "agrupamiento" constituye el conjunto de relaciones "intensivas" de parte a todo (por encajes contiguos de las partes complementarias en totalidades sucesivas de diversos órdenes):

[21] Véase nuestro *Traité de logique*. Colin, cap. II, III y VI.

[22] Distintas en oposición a las que se repiten, es decir, a las tautologías (véase 5), cuya composición asociativa supone que tengan el mismo valor en ambos miembros de la ecuación.

los encajes de parte a todo constituyen, en este caso, las composiciones progresivas del sistema, en cambio, las complementaridades progresivas dicotómicas (y la contigüidad resultante de ella) aseguran su reversibilidad. Ahora bien, el "agrupamiento" se asemeja, en primer lugar, a otra estructura: la de las "redes" o "reticulados" que constituye una de las únicas formas de conjunto empleadas en la matemática y susceptible de aplicarse a cantidades exclusivamente intensivas.[23] Sin embargo, los reticulados no bastan para expresar en un solo sistema todas la operaciones de la lógica, ya que sólo incluyen una reversibilidad debilitada. Por el contrario, las limitaciones propias de la dicotomía y la contigüidad aseguran al agrupamiento una total reversibilidad, que traduce las operaciones lógicas fundamentales[24]: $A + A' = B$ y $B - A' = A$ (o $p \vee p' = q$ y $q \cdot p' = p$). Por otra parte, basta renunciar a las tautologías $A + A = A$ o $A + B = B$ para estar únicamente en presencia de operaciones realizadas con partes disyuntas: volvemos a encontrar entonces el grupo de las adiciones disyuntivas característico del álgebra de Boole.[25] El "agrupamiento" constituye, en consecuencia, una estructura intermedia entre las redes y los grupos: se trata de una red reversible.

El pasaje del "agrupamiento" de carácter simplemente lógico a los "grupos" que corresponden a la cuantificación matemática, marca pues una etapa decisiva en la constitución de la cantidad: en efecto, al proceder desde las solas relaciones de parte a todo al establecimiento de relaciones generales de las partes entre sí, se lleva a cabo esa generalización de lo intensivo a lo extensivo y lo métrico.

Puede afirmarse entonces que el "agrupamiento" constituye la primera etapa del camino que conduce a los grupos y, en particular, al de los números enteros (etapa en la cual, por otra parte, se han detenido muchas disciplinas, por ejemplo, parte de la zoología y la botánica dedicadas a la clasificación sistemática). Sin embargo, por más elemental que sea la estructura del "agrupamiento" expresión de la cantidad intensiva y las composiciones fundamentales de la lógica cualitativa, no hay que creer que por ello se halla presente desde el comienzo mismo de la evolución mental. Por el contrario, resulta muy significativo, desde el punto de vista de la epistemología genética, comprobar que el niño adquiere las relaciones más simples de parte a todo a través de una construcción laboriosa, que comienza con acciones irreversibles, sondeos y experiencias del sujeto con sus propios actos, para alcanzar sólo más tardíamente el rango de operaciones reversibles.

23 Una red es un sistema semiordenado tal que dos de sus elementos cualesquiera tengan un límite superior y un límite inferior unívocamente determinados. El límite superior es el menor mayorante, por ejemplo la clase común más pequeña que incluye a las clases analizadas. El límite inferior es el mayor minorante, por ejemplo la parte común a las dos clases en cuestión.

24 Véase nuestro *Traité de logique*, punto 39.

25 *Ibid.*, punto 10, núm. 1.

En este sentido, un experimento típico consiste en presentar a los niños una colección B (por ejemplo, cuentas de maderas) formada por dos partes complementarias, una A caracterizada por un color (por ejemplo, cuentas marrones) y que constituye la casi totalidad del conjunto B, y la otra A' caracterizada por otro color y constituida solamente por dos o tres cuentas (por ejemplo, dos cuentas blancas). El problema consiste simplemente en saber si hay más A o B en el conjunto (por lo tanto si hay más cuentas marrones A que cuentas de madera B; todas las cuentas son visibles simultáneamente y el niño sabe controlar y formular que todas estas cuentas, A y A', son "de madera" por lo tanto son B). Ahora bien, los sujetos de 5 a 6 años muestran el siguiente tipo de reacciones: saben describir aparte muy bien las cualidades del todo B ("son todas de madera") y también aparte las cualidades de las partes A y A' ("hay muchas marrones y sólo hay dos blancas"), pero no pueden pensar simultáneamente el todo B y la parte A y deducir que A < B. Porque el pensamiento intuitivo se apoya en la percepción y entonces es irreversible: si se concentra la atención en las cualidades comunes a A y A', el todo B se presenta como indivisible, y el sujeto se olvida de las partes; si, por el contrario, el sujeto piensa en la parte A y en sus cualidades propias, se rompe el todo B y, en presencia de la parte A, sólo queda la otra parte A'. El niño deducirá entonces el hecho absurdo de que A > B porque delega a la parte A' las cualidades del todo destruido B ("hay más cuentas marrones que cuentas de madera —dirá por ejemplo el niño— porque sólo hay dos cuentas blancas"). Por lo tanto, no llega a establecer la relación intensiva A < B porque no domina las operaciones inversas A = B — A' y A' = B — A, que son las únicas que conducen a la conservación del todo B. Por el contrario, los sujetos de 7-8 años deducen sin dificultad que B > A, porque conciben al todo B como invariante sean cuales fueren las composiciones directas o inversas, y porque ya no piensan con imágenes o configuraciones semiperceptuales sino con operaciones reversibles.[26]

De una manera general, el criterio psicológico de la constitución de un "agrupamiento" es el descubrimiento de la conservación de las totalidades, independientemente de la disposición de las partes. Por ejemplo, en los experimentos de correspondencia biunívoca (entre fichas rojas y azules) descriptos en el punto 1, los niños ni siquiera poseen la conservación de cada conjunto considerado por separado (lo cual constituye, por otra parte, el equivalente de lo que acabamos de recordar a propósito de la no conservación del conjunto de las cuentas B); en cambio, los sujetos de 7 años llegan a establecer esta conservación: ahora bien, obtienen precisamente este resultado gracias a las composiciones a la vez reversibles y asociativas a través de las cuales se produce la identidad de cada elemento y la de la totalidad como tal. El sentimiento de la necesidad de

[26] Para más detalles, véase Piaget y Szeminska: *La genèse du nombre chez l'enfant*. Delachaux et Niestlé, 1940, cap. VII (véase nota 5). Debe señalarse que la relación entre las partes A > A' que intervienen en esta experiencia está dada perceptualmente y no constituye una cuantificación extensiva de carácter operatorio.

esta invariancia del todo constituye, en este caso como en muchos otros semejantes, el índice psicológico de la realización acabada de un agrupamiento operatorio a partir de acciones inicialmente irreversibles y no componibles entre sí.[27]

4. La reducción del número cardinal a las clases lógicas y del número ordinal a las relaciones asimétricas. Las distinciones introducidas en el punto precedente facilitarán el examen genético de los célebres intentos de Frege, y luego de Russell y Whitehead, para reducir el número a las operaciones simplemente lógicas. Estos intentos fueron ya aprobados por casi todos los lógicos y por muchos matemáticos, porque la reducción del número a la lógica se presenta, en primer instancia, como la solución más natural, una vez que se ha reconocido la inoperancia de las explicaciones empiristas del número. Sin embargo, esta reducción provocó la desconfianza de algunos célebres matemáticos, entre los que debemos mencionar en primer lugar a Poincaré, y epistemólogos, encabezados por L. Brunschvicg. Por lo tanto, el problema consiste ahora en determinar si los procesos formadores del número son o no los mismos que aquellos de los cuales derivan las clases y las relaciones. En este sentido fue necesario distinguir los diferentes tipos de totalidades operatorias examinados en el punto 3, ya que sólo el examen de su desenvolvimiento genético permite decidir por la experiencia el problema planteado por los lógicos y que acabamos de mencionar.

Es cierto que la verdad lógica es de carácter axiomático y no experimental y que, por lo tanto, puede concebirse una filiación deductiva entre el número y la lógica, aun cuando la experiencia desmienta la filiación real. Pero si las operaciones reales siguieran siendo refractarias a esta reducción, entonces sería interesante traducir en un esquema lógico estas operaciones una vez que han alcanzado el estado de equilibrio y confrontarlo luego con el esquema de Russell. Ahora bien, la experiencia que hemos realizado[28] nos ha conducido a reconocer un paralelismo entre las cuestiones genéticas y las cuestiones lógicas más que un conflicto entre ambos métodos. Por ello nos gustaría exponer aquí brevemente este doble aspecto del problema.

Todos conocen la teoría de Russell: dos clases, consideradas en su extensión, generan una misma "clase de clases" si puede establecerse una correspondencia biunívoca entre los individuos que las componen, y esta clase de clases constituye precisamente un número cardinal; el número 1 es la clase de las clases singulares, el número 2 la clase de los duos, el número 3 la de los trios, etc. etc. Ahora bien, la correspondencia biunívoca sólo se sustenta en la identidad lógica: "x corresponde biunívocamente a y" significa que si x corresponde también a y', entonces y' es

[27] Para las relaciones entre los conceptos de conservación y la agrupación, véase Piaget e Inhelder, *Le développement des quantités chez l'enfant*, Delachaux et Niestlé, 1941, cap. I-III y Piaget y Szeminska, *loc. cit.*, cap. I-IV.

[28] Véase nuestro *Traité de logique*, Colin, cap. II-IV

idéntico a *y*, y que si *y* corresponde también a *x'*, entonces *x'* es idéntico a *x*. A partir de entonces, la construcción de la clase de las clases equivalentes, que constituye al número, sólo requiere operaciones puramente lógicas. En cuanto al número ordinal consiste, a su vez, en una clase de relaciones asimétricas "semejantes", es decir, nuevamente el producto de una correspondencia biunívoca, pero entre relaciones.

Esta concepción dio lugar a dos tipos de objeciones: uno la acusa de círculo vicioso porque el número ya estaría presente en la idea de los objetos singulares puestos en correspondencia de una clase a otra, y el otro insiste en las diferencias funcionales de la clase lógica y el número.

H. Poincaré (seguido por P. Boutroux, etc.) insistió en particular en el primer punto y admitió que, en la expresión "un" hombre, etc., el objeto individual o la clase singular ya implica la presencia del número 1. A lo cual Couturat respondió que el "uno" lógico no implica el número 1 sino simplemente la identidad: una clase A es singular si en las proposiciones "*x* es un A", "*y* es un A", etc., hay identidad entre *x* e *y*. Asimismo los términos "algunos", "todos" y "ninguno" no implican la intervención de los números, sino simplemente la pertenencia o no pertenencia de los individuos a la clase.

Esta primera discusión no tiene salida si nos mantenemos en el punto de vista atomístico de la lógica clásica, que cree poder considerar una proposición aparte, una clase o una relación en forma aislada, etc. Para este atomismo, es claro que la expresión "un hombre" puede significar a veces una unidad numérica o algún objeto calificado cuyas propiedades le impiden ser idéntico a cualquier otro, lo cual le otorga el valor lógico de elemento único de una clase singular. Tanto Russell, cuando razona con identidades y clases aisladas, como sus adversarios, cuando lo siguen en este terreno a fin de obtener el recurso implícito a números aislados, se comprometen entonces en la dirección de un atomismo artificial que permite justificar también las tesis contrarias, sin criterio definitivo alguno, ya que la identidad pertenece tanto a la matemática como a la lógica "intensiva".

Lo esencial de la explicación de Russell corresponde a tal punto a este atomismo que en ella los números se engendran cada uno de por sí, gracias a la intervención de clases independientes entre sí (como clases de clases), y no por una ley de construcción que implique la progresión O, 1, 2, 3...

Ahora bien, únicamente la estructura de conjunto de la totalidad operatoria en la que se insertan los elementos permite distinguir cuál es su especificidad, ya sea lógica (cantidad intensiva) o matemática (cantidad extensiva o numérica). El término "un hombre" se refiere al número 1 si es un elemento de operaciones que lo comparan con "dos hombres" o "*n* hombres", porque entonces "un" desempeña el papel de unidad reiterable; pero el mismo término es independiente del número si pertenece a un sistema operatorio que sólo se refiere a las relaciones de individuo a clase, o de clases parciales a clases totales. Por lo tanto, resulta evidente que es el "agrupamiento", o "el grupo", de las operaciones en juego la

determinante y no el carácter de los elementos de por sí, carácter que, si se las considera en forma aislada, es, hablando rigurosamente, indeterminable.

Surge entonces el segundo tipo de objeciones dirigidas a la teoría de Russell: aquellas que oponen el papel funcional de las clases al de los números. La función de la clase es identificar —como dice L. Brunschvicg— y la del número diversificar; se trata entonces de funciones fundamentalmente heterogéneas. Sin embargo, tanto para este argumento como para el anterior el sistema operatorio de conjunto será el que necesariamente determine las significaciones funcionales y no los elementos de por sí.

Entonces el problema se plantea del siguiente modo: cuando Russell nos habla de "clase de clases equivalentes", la operación de correspondencia biunívoca por medio de la cual se construye esta equivalencia ¿sigue siendo simplemente lógica, es decir que sólo proviene de la cantidad intensiva que interviene en la formación de las clases cualitativamente definidas, o bien introduce implícitamente el número, no como número aislado adherido a la clase considerada, sino en la medida en que esta operación de correspondencia biunívoca presenta ya el carácter de ser extensiva y supera, *ipso facto* el terreno de la lógica de las clases calificadas?

Nos parece que aquí no sirve para nada demostrar que la correspondencia biunívoca descansa en la pura identidad. Aun cuando así fuera (quedaría, por otra parte, tener que demostrar que la relación de correspondencia no supera el marco de las equivalencias lógicas), éste no es el problema, ya que una identidad puede surgir de las operaciones propias de un "grupo" matemático (por ejemplo, $1 \times 1 = 1$ o $1 : 1 = 1$, y en general toda "operación idéntica") o bien de las operaciones que caracterizan a un "agrupamiento" lógico (intensivo). El verdadero problema consiste en saber si la correspondencia biunívoca como tal, es decir, como conjunto de operaciones, es específica de una agrupación o de un grupo. En el primer caso, la reducción de Russell sería eficaz, puesto que el número provendría entonces de puras clases relacionadas entre sí únicamente por un "agrupamiento" de clases. En el segundo caso, esta reducción aparecería como viciada, porque introduce en las clases un sistema operatorio ya numérico para extraer luego de él demasiado fácilmente el número.

Ahora bien, tanto el examen genético del desarrollo como el del pensamiento científico en sus diversas manifestaciones y a diferentes niveles proporcionan una respuesta decisiva. Existen, en realidad, dos clases muy distintas de correspondencia biunívocas: una "cualitativa" o lógica (por lo tanto, de carácter "intensivo" puro) y la otra "cualquiera" o matemática. Pero Russell no aplica la primera de estas dos operaciones en su demostración, sin duda alguna aplica la segunda, de ahí el malestar que su reducción produce. Hay en ella un círculo puesto que, en este caso no es a la clase en sí a la que logra reducir el número cardinal, sino a la clase cuantificada previamente mediante una operación de carácter ya numérico.

En efecto, existe una correspondencia biunívoca de carácter simple-

mente lógico, es decir que los elementos se corresponden uno a uno en virtud de sus cualidades diferenciales y no como unidades cualesquiera. Esta operación de correspondencia cualitativa es la que caracteriza las "homologías" de la anatomía comparada, por ejemplo cuando una pieza del esqueleto de una clase zoológica se pone en correspondencia con la pieza homóloga del esqueleto de otra clase. Sin embargo, el empleo de esta operación es mucho más general: interviene, por ejemplo, cuando se analizan las semejanzas entre dos objetos y para ello se hace corresponder una parte de uno con una parte semejante del otro. Desde el punto de vista genético, la correspondencia biunívoca cualitativa es precoz: se prepara intuitivamente a partir del dibujo e incluso desde la aparición de la imitación y se hace operatoria alrededor de los 7 años con las comparaciones sistemáticas (basadas en las operaciones de multiplicación lógica).

Muy diferente es la correspondencia biunívoca "cualquiera" puesto que no se limita a determinar las correspondencias en función de las semejanzas cualitativas, sino que se asocia un elemento cualquiera de uno de los conjuntos con uno de los elementos —también cualquiera— del otro conjunto (con la única condición de contar una sola vez este elemento). Así, cuando Russell construye el número 12 y hace corresponder uno a uno los apóstoles de Jesucristo con los mariscales de Napoleón, el apóstol Pedro no es asociado con el mariscal Ney en virtud de sus cualidades comunes (como cuando un biólogo pone en correspondencia los pelos de los mamíferos con las plumas de los pájaros) sino simplemente en tanto uno constituye una unidad cualquiera del primer conjunto y el otro una unidad, también cualquiera, del segundo.

Vemos pues que la correspondencia biunívoca cualitativa no proviene del campo de la lógica de las clases y la cantidad intensiva. Constituye incluso un "agrupamiento" bien determinado, el de la multiplicación biunívoca de las clases. Veamos a continuación un ejemplo de ella:

Si $B_1 = A_1 + A'_1$ y si $B_2 = A_2 + A'_2$ la multiplicación $B_1 \times B_2$ da:

$$B_1 \times B_2 = (A_1 + A'_1) \times (A_2 + A'_2) = \left\{ \begin{matrix} A_1A_2 + A_1A'_2 \\ A'_1A_2 + A'_1A'_2 \end{matrix} \right\} = B_1 B_2$$

es decir, un cuadro de doble entrada en el cual hay correspondencia término a término entre los elementos de las dos hileras, horizontales o verticales [29]: $A_1 A_2$ corresponde así a $A'_1 A_2$ por intermedio de la cualidad común A_2 y $A_1 A'_2$ a $A'_1 A'_2$ por intermedio de A'_2; o también $A_1 A_2$ corresponde a $A_1 A'_2$ por intermedio de A_1 y $A'_1 A_2$ a $A'_1 A'_2$ por intermedio de A'_1.

Por lo tanto, la correspondencia cualitativa no implica para nada la intervención del número entero, sino simplemente la de cualidades comunes y clases definidas mediante estas últimas (las clases singulares no suponen otra cosa que el "uno" lógico, es decir, la singularidad cualitativa). Por el contrario, la correspondencia biunívoca cualquiera es una

[29] Véase nuestro *Traité de logique*, punto 15.

operación extensiva: por el solo hecho de que elimina por abstracción las cualidades propias de los elementos considerados y los transforma en unidades numéricas.

Si Russell hubiera podido emplear la correspondencia biunívoca cualitativa para construir sus clases de clases, hubiera evitado caer en el círculo vicioso. Pero las clases de clases que se sustentan en la correspondencia cualitativa no son precisamente números. Son clases de clases puramente lógicas, de carácter multiplicativo (por ejemplo, la clase de todos los esqueletos de los vertebrados, o la clase $B_1 B_2$). Al utilizar la correspondencia biunívoca cualquiera para operar su reducción, Russell introduce por el contrario y en los hechos mismos, el concepto de unidad en las clases que pone en correspondencia, y entonces no es sorprendente que las clases así construidas constituyan números: en efecto, ya no son simples clases lógicas, desde el momento en que se ponen en correspondencia elementos cualesquiera, sino conjuntos de unidades, es decir, clases numéricas.

En cuanto al número ordinal concebido como una clase de relaciones "semejantes", la dificultad que se presenta es la misma pero transpuesta en términos de relaciones. ¿Qué es la "similitud" que aquí interviene? ¿Se trata de una similitud simplemente cualitativa, de tal modo que las relaciones asimétricas que vinculan los objetos seriados sean las mismas en las dos series correspondientes, sin que cada relación parcial cuente como una unidad y, en consecuencia, sin que los objetos seriados se distingan solamente por su número de orden? ¿O bien se trata de una similitud generalizada y en consecuencia, nuevamente "cualquiera", que hace abstracción del contenido cualitativo de las relaciones y sólo conserva la sucesión como tal, es decir, los números de orden de los objetos y los de las relaciones que los unen sucesivamente? En el primer caso, la similitud constituye un "agrupamiento" intensivo (el de las multiplicaciones biunívocas de relaciones asimétricas).[30] En el segundo caso, por el contrario, genera una sucesión matemática de orden puro que ya implica en consecuencia la idea de número ordinal.

Russell, al no establecer en su doble reducción estas distinciones genéticas que conducen a una distinción correlativa en la lógica entre las operaciones como tales, y no solamente entre las clases y las relaciones aisladas, se encierra así en dos círculos viciosos.

5. La intuición racional del número. Como el número no puede reducirse sin más a la lógica de las clases o a la de las relaciones, ¿hay que concebirlo entonces como el producto de una intuición racional, irreductible a las operaciones lógicas? Este es el punto de vista que sostienen muchos matemáticos, y por otra parte por motivos bastante diferentes que se explayan entre la intuición de la esencia estática del número y la intuición operatoria. Veamos ahora únicamente esta última. H. Poincaré, por más convencionalista que haya sido en cuanto al detalle de la construcción de las diversas formas de número (así como en la cuestión de las

[30] Véase *Traité de logique*, punto 21.

relaciones entre los diversos espacios) admite que el número entero se apoya en una especie de intuición, a la vez *operatoria* y a priori, de la razón (como la idea del grupo de los desplazamientos respecto del espacio); esta intuición se traduce en el razonamiento matemático por excelencia: el razonamiento por recurrencia. Para Brouwer —que renovó el intuicionismo de Poincaré y lo opuso al formalismo lógico en el detalle de los mismos razonamientos constructivos (negación del principio del tercero excluido para los conjuntos infinitos)— el carácter esencial de una entidad matemática radica, no simplemente en el hecho de estar exenta de toda contradicción (lo cual para este autor no es suficiente para asegurar su existencia), sino en el hecho de que efectivamente se lo puede construir. El dominio de la intuición racional deberá extenderse así del a priori a la libre construcción operatoria, pero el carácter común de sus diversas interpretaciones sigue siendo la discontinuidad entre lo intuitivo y la simple lógica.

Ahora bien, a pesar de la autoridad de estos grandes científicos, nos es difícil seguirlos en el terreno de la intuición del número, porque no podemos conciliar con los hechos genéticos —es decir, con lo que sabemos acerca de la formación de las operaciones—, la hipótesis de la irreductibilidad del número a las operaciones lógicas. Entre la reducción insuficientemente operatoria de Russell y la intuición directa de Poincaré y Brouwer, puede existir este *tertium*.

En efecto, ¿cómo caracteriza Poincaré la intuición del número puro? No por la intuición de números dados, sino por la de un número "cualquiera": se trata de la "facultad de concebir que una unidad puede agregarse a un conjunto de unidades[31]". Por lo tanto, se trata no de la intuición de una forma acabada, sino de un poder del espíritu, de ese poder que se encuentra en la base de la recurrencia. Pero de dos cosas una. O bien el término intuición no añade nada a la operación misma: desde este punto de vista, no toda operación que se repite implica la intuición de la unidad, y se trata de explicar la construcción de esta unidad en el caso de las operaciones numéricas. O bien las operaciones numéricas proceden de una intuición que las opone desde el comienzo a las operaciones lógicas, precisamente porque contiene de antemano la noción de unidad; es en esta segunda interpretación donde aparece la dificultad genética.

En este sentido hay un resultado extremadamente sorprendente de las investigaciones acerca de la génesis de los conceptos matemáticos en el niño y que nos parece adecuado para hacer una revisión de las relaciones establecidas habitualmente entre la lógica y la intuición: todos los conceptos de carácter extensivo y métrico (en el sentido definido en el punto 3), como la medición, las proporciones, etc., en geometría, y el número mismo, sólo se constituyen en su forma operatoria cuando pueden apoyarse en "agrupamientos" lógicos de carácter intensivo. Estos agrupamientos intensivos no necesariamente preceden en el tiempo a su cuantificación extensiva,

[31] *Science et hypothèse*, pág. 37.

ya que esta cuantificación puede efectuarse inmeditamente después de la constitución de aquellos agrupamientos, o bien ambas construcciones, intensiva y extensiva, pueden incluso apoyarse una sobre la otra. En el caso de la medición, en el campo de la geometría, la transitividad intensiva precede ciertamente y de modo evidente a la cuantificación extensiva y métrica: el sujeto tiene que haber comprendido que B puede servir de medida común a A y C según el esquema (A = B; B = C por lo tanto A = C) para que sea capaz de reducir los términos comparados a unidades comunes. Sin embargo, en el caso del número, no existe en primer lugar un estadio prenumérico ya caracterizado por estructuras lógicas y luego un estadio numérico. Sin embargo, la construcción de la sucesión de los números sólo es posible a cierto nivel (alrededor de los 6-7 años) porque se apoya en la comprensión de las estructuras lógicas, cuya elaboración insuficiente en los niveles anteriores retarda la iteración de la unidad.

La interdependencia entre la lógica y lo numérico es la resultante de un factor en el que poco pensaron los partidarios de la intuición del número puro: se trata del concepto de conservación de los conjuntos como totalidades, ya sean lógicas o numéricas, que no se presenta en absoluto como siendo necesario en el punto de partida del pensamiento intuitivo y de que esta conservación debe construirse pues operatoriamente. Ahora bien, el "agrupamiento" desempeña precisamente un papel indispensable en esta construcción. En efecto, sucede que antes de los 6-7 años— es decir, a la edad en que el niño ya conoce a través del lenguaje una serie de conceptos pero no sabe aún agruparlos lógicamente por composiciones reversibles y a la edad en que conoce también los primeros nombres de los número pero los adjudica simplemente a figuras perceptuales (un objeto, dos objetos, tres objetos, etc.) — el niño no puede realizar aún conservación de las clases lógicas (del tipo A $<$ B) ni tampoco de los conjuntos numéricos, aun cuando consiga efectuar espontáneamente una correspondencia término a término de carácter visual entre los elementos de estos conjuntos. Hemos hecho referencia a estos hechos en el punto 1 (respecto de la carencia de equivalencia constante entre las colecciones correspondientes) y al final del punto 3 (respecto del encaje de la parte A en el todo B); por lo tanto, resulta inútil volver aquí sobre el tema. Sin embargo, debemos ahora averiguar cómo procede el sujeto desde la no conservación a la conservación de la colección total.

Ahora bien, el análisis genético proporciona para este punto una respuesta decisiva: el pasaje de las configuraciones perceptuales o imaginadas, desprovistas de conservación, a las colecciones lógico-aritméticas con conservación necesaria es la resultante de la reversibilidad progresiva de las acciones de reunir y seriar, y desemboca simultáneamente en los "agrupamientos" del encaje de las clases y la seriación de las relaciones asimétricas, así como en el "grupo" que caracteriza a la sucesión de los números enteros. La "facultad de concebir que una unidad puede agregarse a un conjunto de unidades", que Poincaré señala como siendo lo específico de la intuición del número puro, supone entonces la "facultad" de concebir

conjuntos invariantes encajados unos en otros, y la "facultad" de ordenar desde el comienzo los elementos "agregados": indisociable del "agrupamiento" de las clases y del de las relaciones asimétricas, la sucesión de los números no puede beneficiarse entonces con el privilegio de una primera intuición, y la construcción del concepto de unidad presenta un problema que, en consecuencia, no puede resolverse simplemente recurriendo a esta intuición.

Que la sucesión de los números —una vez construida— produzca una intuición racional de algún modo resultante, y no previa, en el sentido de que el número es aprehendido directamente por el espíritu sin pasar por intermedio de razonamientos discursivos o "lógicos", es un problema radicalmente diferente.

No nos cabe duda alguna acerca de esta intuición final, pero en el sentido de que se habla —junto con Poincaré— de la intuición del jugador de ajedrez que juega una partida: concentrado instantáneo de innumerables razonamientos anteriores (y olvidados), esta intuición final no es más que la expresión de la comprensión inteligente —como observaba L. Brunschvicg— y de ningún modo nos informa en cuanto a su propia construcción.

En resumen, no se puede oponer la intuición del número puro, que caracterizaría la sucesión de los enteros, y la construcción artificial o convencional de los números generalizados (fraccionarios, etc.). La construcción de la unidad presenta exactamente las mismas propiedades, salvo los diversos grados de complejidad, que la de los números que no pertenecen a la sucesión de los enteros (fraccionarios, imaginarios, etc.), lo cual supone entonces la extensión de la noción de intuición racional a estos productos derivados, o bien la extensión de la idea de convención a la explicación de la misma unidad. Por lo tanto, en el poder operatorio en general del espíritu, en sus formas lógicas como aritméticas, es donde reside el misterio; misterio que el convencionalismo no puede eludir cuando se enfrenta con sus construcciones más alejadas de la acción concreta, ni que tampoco puede explicar el intuicionismo apriorista simplemente recortando, en el conjunto de las operaciones lógico-aritméticas, aquellas que tienen que ver con el número entero, en oposición con las clases y las relaciones lógicas. En cuanto a Brouwer que convierte la construcción operatoria en una realidad que supera lo no contradictorio de carácter lógico, olvida que, junto al juego formal de las proposiciones combinadas en una axiomática, la lógica viva requiere ese carácter operatorio y que la no contradicción efectiva se funda en la reversibilidad inherente a las operaciones constructivas de las clases y las relaciones al mismo tiempo que de los números.

6. Clases, relaciones y números. El proceso genético durante el cual se elaboran los agrupamientos de clases y relaciones asimétricas, así como el grupo de los números enteros, es un testimonio de la estrecha interdependencia entre estas tres construcciones. Este es el hecho cuya significación epistemológica ha de analizarse. Desde un cierto punto de

vista, se puede expresar este fenómeno tanto diciendo que las clases lógicas y las relaciones asimétricas son las resultantes de una disociación de las operaciones implicadas en el número como presentando a este número como una síntesis de las clases y las relaciones lógicas reunidas en una sola totalidad operatoria. En la medida en que hay reducción, ella es recíproca, en virtud de un mecanismo genético del cual volveremos a encontrar muchos otros ejemplos.

A partir de las acciones más elementales ejercidas sobre la realidad, la percepción distingue una pluralidad indeterminada de elementos vinculados por semejanzas y diferencias. Dicho de otro modo, desde el punto de partida, cualidad y cantidad se hallan indisolublemente unidas, y la cantidad simplemente expresa las reacciones de extensión entre los términos calificados por sus semejanzas o diferencias. A través de la combinación de estas acciones iniciales de reunión y separación, las operaciones intelectuales construirán simultáneamente las clases agrupando los objetos por sus semejanzas más o menos generales o especiales, las relaciones asimétricas agrupando los mismos objetos por sus diferencias ordenadas, y los números agrupando los objetos en tanto son a la vez equivalentes y distintos. Sin embargo, hay que comprender bien que al comienzo de esta evolución, no puede haber aún clases en sentido estricto, relaciones asimétricas transitivas o números: los agrupamientos lógicos y los grupos numéricos aparecen, por el contrario, como una forma del equilibrio final de un proceso continuo caracterizado por sus coordinaciones y su reversibilidad progresivas. En el punto de partida sólo están dadas las relaciones perceptuales relacionadas con la actividad motriz, es decir, relaciones que no se componen entre sí, ni desde el punto de vista lógico ni desde el punto de vista aritmético, porque son intransitivas, irreversibles, no asociativas, e incluso están desprovistas de esa identidad elemental que es la única que podría garantizar su invariancia en el seno de las composiciones posibles.[32] En cuanto a su extensión —es decir, a los conjuntos formados por los elementos calificados, en oposición a las cualidades mismas— esas relaciones sólo se distinguen en el interior del campo perceptual momentáneo, pero ni siquiera constituyen de entrada "objetos" en el sentido de elementos que se conservarían fuera de este campo. Aun más, la relación fundamental que define la cantidad intensiva propia de las coordinaciones —a saber, que la parte es menor que el todo— ni siquiera es permanente en el plano perceptual. Por ejemplo, en el estudio de las ilusiones de peso, se puede presentar al sujeto una barra de metal A que se coloca luego y enseguida sobre una caja vacía de madera A' de iguales dimensiones: el todo B, formado por la reunión de A + A' parece ser entonces más liviano que la parte A aislada (así sucede incluso con el adulto y con profesores de psicología que sin embargo conocen la teoría de esta ilusión).

La primera etapa de la construcción que, a partir de este flujo irrever-

[32] Véase el cap. 2, punto 4. Véase también nuestra *Psychologie de l'intelligence*. Coll. A. Colin, cap. III.

sible de cualidades y cantidades aún no trabajadas conceptualmente,[33] va a conducir simultáneamente a las clases, las relaciones y los números, consiste en coordinar las acciones entre sí en forma de "esquemas" prácticos, especies de preconceptos sensoriomotores, caracterizados por la posibilidad de repetir la misma acción en presencia de los mismos objetos, o de generalizarla en presencia de otros objetos análogos. Estos esquemas elementales, al producir la solidificación de los objetos físicos, son los que constituyen las relaciones de semejanza, diferencia y la cuantificación inicial, en los que puede buscarse la fuente de las futuras estructuras lógicas y numéricas. Sin embargo, es necesario comprender que si bien las acciones así esquematizadas equivalen ya, en su forma más general, a la reunión o separación de los objetos distinguidos y conservados, gracias a ellas, en función de los diversos objetivos cualitativos abordados, a su vez estas reuniones y disociaciones, así como las figuras prenuméricas que constituyen, se apoyan en un poder coordinador cuyos esquemas ponen de manifiesto las estructuras sucesivas, pero cuyo funcionamiento se remonta hasta los montajes hereditarios cuyas raíces son desconocidas. Por lo tanto, desde el punto de vista genético, no hay nunca un hecho primero sino una sucesión de etapas cuya ley de sucesión y cuyo mecanismo de pasaje de una a otra son los únicos accesibles al análisis. Pero esta sucesión y estos pasajes son suficientes para informarnos acerca de la interdependencia final de las clases, las relaciones y los números, puesto que el proceso entero tiende hacia un estado de equilibrio que se alcanza alrededor de los 7 años de desarrollo.

Con la representación verbal e imaginada, las mismas acciones se interiorizan en conceptos intuitivos, en primer lugar preoperatorios; pero sus reuniones y separaciones que a partir de entonces efectúa y coordina el pensamiento —tanto y más que las realizadas por los movimientos materiales— conducirán durante las nuevas etapas a las agrupaciones y a los grupos propiamente operatorios. Sin embargo, se requieren todavía algunos años de elaboración entre este inicio de mentalización de la acción y el acceso al nivel de las operaciones concretas, porque la acción interiorizada en pensamiento, así como las acciones materiales del nivel precedente, sigue siendo durante mucho tiempo irreversible antes de prestarse a todas las composiciones. En el plano sensoriomotor, únicamente el sistema privilegiado de los desplazamientos había alcanzado cierta reversibilidad que conducía a la permanencia del objeto práctico, es decir, a la posibilidad de retornos empíricos; en cambio, las otras formas de acción permanecían polarizadas en un sentido único, el de su finalidad. En el proceso de interiorización de las acciones en representaciones, esta irreversibilidad relativa aún domina durante mucho tiempo todas las coordinaciones mentales que se yuxtaponen a las coordinaciones prácticas, porque los objetos

[33] Spaier, en la *Pensée concrète* atribuye, es cierto, una estructura conceptual a los datos preceptuales mismos. Pero los criterios empleados para saber si hay o no concepto (denotación, etc.) no pueden dejar de carecer de precisión en tanto uno no se refiera a un sistema definido de conjunto, tal como los diferentes "agrupamientos"

de pensamiento son siempre más numerosos y porque las distancias espaciotemporales que los separa del sujeto aumentan proporcionalmente. El resultado de esta irreversibilidad es el fenómeno muy general que caracteriza al pensamiento prelógico de 2 a 7 años: la no conservación de los conjuntos resultante de las dificultades de la reunión y la separación mentales de los objetos en forma reversible. Esta no conservación —que ya hemos mencionado en el punto 5— constituye así el equivalente (con un desajuste de la acción al pensamiento y, en consecuencia, del establecimiento de las relaciones prácticas al de las relaciones mentales), de la no conservación de los objetos en el plano de la acción inicial. Sólo cuando las reuniones y separaciones se hayan extendido a todos los objetos del pensamiento, a título de formas más generales de la asimilación y la acomodación mentales, el equilibrio alcanzado por estas dos funciones asegurará la reversibilidad: las operaciones reversibles constituyen así el estado de equilibrio móvil hacia el cual tienden todas las coordinaciones del pensamiento, en la medida en que éstas superan la simple intuición imaginada y se organizan en articulaciones siempre más ágiles. El pensamiento intuitivo, que marca los comienzos de la representación, no es sino la evocación por la palabra y la imagen de las diversas acciones reales, pero en una forma aún casi material y, en consecuencia, irreversible. Las operaciones, por el contrario, son las mismas acciones pero coordinadas entre sí por el pensamiento, desenvueltas en los dos sentidos y combinadas en todas las composiciones posibles, porque se las ha generalizado a todos los objetos y ya no simplemente, como sucede en la intuición imaginada, a aquellos sobre los que se ejerce la acción material.

Una vez recordado esto, comprendemos cómo las reuniones y separaciones mentales de los objetos, a medida que acceden al estado de operaciones reversibles y susceptibles de componerse entre sí, generarán de modo forzosamente interdependiente las clases, las relaciones asimétricas y los números, que actuarán a la vez sobre las cualidades como tales y sobre sus relaciones cuantitativas [34]:

1º En primer lugar, se pueden reunir los objetos por sus semejanzas o separarlos por la ausencia de estas mismas semejanzas, de donde surge entonces la formación de las clases encajadas A, B, C, etc.; por semejanzas cada vez más generales, o clases B — A = A'; C — B = B', etc.; por ausencia de semejanzas especiales. Este constituye el principio del "agrupamiento" aditivo del encaje de las clases que hemos tomado como ejemplo en el punto 3. Llevando la clasificación a sus últimos extremos, se tendrá una clase singular A, cuyo único individuo posee el carácter (A) y una clase singular A', cuyo único individuo no posee el carácter (A), pero posee con A el carácter común (B): de donde la clase B = A + A'. Si el individuo de la clase singular B' carece de este carácter (B), pero los B y B' tienen en común el carácter (C), se tendrá la clase C = B + B'

[34] Para lo que sigue, véase nuestro *Traité de logique*, punto 26; y nuestra obra: *La genèse du nombre chez l'enfant*. Delachaux et Niestlé, 1940. Véase nota 5.

c C = A + A' + B'. Y así seguido. Desde este punto de vista totalmente cualitativo, A y A' son pues equivalentes (es decir, recíprocamente sustituibles) entre sí en B; A, A' y B' son equivalentes o sustituibles en C, etc. Sin embargo, A no es el equivalente de A' en A, ni en A'; y B' no es equivalente o sustituible a A, ni a A' en B, etc. Por lo tanto, estas equivalencias cualitativas, o semejanzas cada vez más generales, son las que constituyen en efecto el principio de la reunión, y la ausencia de cualidades comunes de diversos órdenes cada vez más especiales que constituye el principio de la separación de las clases.

Lo propio del nivel intuitivo preoperatorio es que el niño sólo puede realizar algunas de estas reuniones, y además sin reversibilidad alguna (véase final del punto 3); en cambio, las operaciones concretas marcan la generalización de estos encajes simples.

2º Tomemos ahora un conjunto de elementos A, A', B' etc. (que no distinguiremos por el momento de sus clases singulares) que tienen una misma cualidad, pero en diversos grados de intensidad creciente (cada vez más pesados, o grandes, etc.). Entonces podemos seriarlos en función de estas diferencias. Obtenemos entonces una primera diferencia *a* entre O y A, una diferencia *a'* entre A y A', una diferencia *b'* entre A' y B', etc. De donde la agrupación (aditiva) de la seriación de las relaciones asimétricas: $a + a' = b$; $b + b' = c$, etc., cuya operación inversa es la adición de una relación conversa, $+ (-a)$, lo cual equivale a la sustracción $-a$.

Esta agrupación, que se traduce en operaciones concretas a través de la conducta elemental de la construcción de una hilera de elementos ordenados, sólo es accesible después de la aparición del encaje de las clases: los niños pequeños no logran ordenar magnitudes crecientes si no lo hacen por pares o por pequeñas series empíricas, sin composición transitiva ni reversible.

Pero cuando se alcanza este agrupamiento (alrededor de los 6-7 años como el caso del encaje de las clases) se comprueba que, si bien es análoga a la precedente, sin embargo no es idéntica a ella desde el punto de vista de las operaciones en juego. En efecto, si se serian A y A' en el orden A → A', se lo hace en tanto son diferentes uno del otro; en cambio, se los reúne en una misma clase A + A' = B, en tanto son semejantes. La adición $a + a' = b$ no es conmutativa: en cambio, la adición A + A' = B puede hacerse también en el orden A' + A = B.[35] En resumen, como el agrupamiento de las clases se funda en la semejanza de los elementos no implica orden alguno en cuanto a la clasificación de las clases singulares A, A', B', etc., en cada una de las totalidades B, C, D, etc., sino solamente en cuanto al encaje de las clases de extensión creciente A, B, C, D, etc. El agrupamiento de las relaciones asimétricas se basa en la diferencia progresiva de los elementos e implica, por el contrario, un orden necesario una vez que se ha elegido la cualidad que servirá como principio de seriación (peso, etc.).

[35] Lo cual equivale a decir que *a* no es equivalente o sustituible a *a'* en *b*; en cambio, A es sustituible a A' y recíprocamente porque ambos son equivalentes en B.

Desde este punto de vista, los dos agrupamientos no pueden funcionar simultáneamente con los mismos objetos: o bien los objetos se clasifican por sus diversas semejanzas parciales, o bien se los ordena por una sola cualidad a la vez, pero se los puede agrupar simultáneamente en función de sus semejanzas y sus diferencias crecientes. Los dos agrupamientos son pues "complementarios": si se agrupan los objetos por sus cualidades, o bien se elige una en función de la cual serán todos diferentes entre sí (relaciones asimétricas y seriación) o bien se clasifican en función de la jerarquía de las equivalencias cada vez más generales (relaciones simétricas y encaje de las clases), pero no se pueden efectuar los dos agrupamientos mediante las mismas operaciones.

3º ¿En qué consiste entonces el número? En transformar los elementos en unidades, es decir, en no encajar simplemente estos términos A y A' en B, etc., o las relaciones *a* y *a'* en *b*, etc., en virtud de las semejanzas o diferencias cualitativas percibidas, sino en darse el derecho de sustituir A por A', B', etc., o *a* por *a'*, *b'*, etc., en el seno de cualquier clase o relación parciales o totales. Ahora bien, el establecimiento de esta relación de las partes mismas entre sí equivale precisamente a fundir en un solo todo el principio de la seriación de las diferencias y el de la jerarquía de las equivalencias, puesto que entonces los elementos A, A', B', etc., se hacen simultáneamente sustituibles sin restricción alguna y seriables también sin restricción alguna, es decir que se los transforma en unidades a la vez equivalentes y distintas. Pero esta fusión operatoria sólo es posible al precio de una abstracción fundamental, que aparece únicamente en el terreno de los agrupamientos cualitativos (donde los elementos se encajan y serian una vez por todas en función de sus cualidades): haciendo abstracción de las cualidades diferenciales mismas. En efecto, suprimamos estas últimas, lo cual equivale a decir que generalizaremos la equivalencia entre los elementos singulares a partir de entonces privados de sus cualidades: los elementos A, A', B', etc., se harán así sustituibles entre sí en el seno de cualquier clase, incluso en la de A, A', etc., y ya no solamente en el seno de las clases generales. Sin embargo y al mismo tiempo, conservemos el derecho de seriar estos elementos, lo cual es (puesto que se han hecho equivalentes) la única forma de seguir distinguiéndolos. Pero, ya que eliminamos las cualidades distintivas, seriémoslos en el orden más general, generalizando así el principio de la diferencia así como acabamos de generalizar el principio de la semejanza (o equivalencia): sucederá entonces que todos los órdenes posibles serán semejantes entre sí, porque, en las sucesiones A, A', B' ... o A', A, B' ... o B' A, A', etc., siempre hay un término que no tiene antecedente, un término que sucede al que acabamos de definir, etc. Esto es lo que llamaremos un orden "vicariante". Aclarado este punto, vemos que el número no es sino una colección de elementos que se han hecho todos equivalentes por semejanza generalizada y, sin embargo, se han mantenido todos distintos gracias a un orden vicariante o diferencia generalizada. Todos estos elementos constituyen, en efecto, una unidad a la vez cardinal (puesto que $A = 1$; $A + A' = 2\,A$; $A + A' + B' = 3\,A$, etc.) y ordinal (puesto que siempre hay un

primer elemento, sea cual fuere el orden elegido, siendo este primer elemento aquel que no tiene precedente y luego un segundo elemento que es el sucesor del primero, etc.).

El grupo aditivo de los números enteros es pues el producto de una fusión operatoria entre los agrupamientos cualitativos de las clases y las relaciones asimétricas, pero por abstracción de las cualidades diferenciales sobre las que se basan estos agrupamientos. El número es así complementario respecto de las clases y las relaciones asimétricas, como las clases y las relaciones asimétricas lo son entre sí: en efecto, o bien se tienen en cuenta las cualidades diferenciales y sólo se puede clasificar en función de las equivalencias cualitativas cada vez más generales o seriar según las diferencias cualitativas; o bien se hace abstracción de las cualidades diferenciales y sólo se puede clasificar y seriar a la vez, ya que si no se las ordena en serie no hay elementos distintos, y si no se las clasifica no se las puede reunir como equivalentes. Ahora bien, clasificar y seriar al mismo tiempo es, ni más ni menos, enumerar.

En realidad, sucede así en todos los niveles de la génesis real de los números. En la medida en que las correspondencias cualitativas intuitivas se transforman en correspondencias biunívocas "cualesquiera" (véase el punto 4) surge el número; ahora bien, esta transformación supone a la vez el encaje de las colecciones de extensión creciente, es decir, el agrupamiento aditivo de las clases y la seriación de los elementos, esto es, el agrupamiento aditivo de las relaciones asimétricas.

Por otra parte, esta construcción explica, en el hecho mismo, por qué los conceptos ordinales y cardinales del número son necesariamente solidarios en lo finito, como lo ha mostrado de manera decisiva L. Brunschvicg. Porque, genéticamente, si el número está formado a la vez por clases y relaciones asimétricas, cada uno de estos dos componentes sólo puede engendrar la forma correspondiente del número (cardinal para la clase y ordinal para la seriación) apoyándose en el otro. Volveremos, por otra parte, a encontrar un poco más adelante este problema (en el punto 7).

Para concluir, el número no se reduce a los seres lógicos, considerados como "agrupamientos" que pueden aislarse, puesto que les es complementario y expresa su fusión operatoria en una sola totalidad no realizable en el plano cualitativo. Los seres lógicos no se reducen tampoco al número, puesto que son la resultante de la disociación de sus componentes cardinal (encaje) y ordinal (seriación), con recurso a las cualidades diferenciales. Sin embargo, las clases, las relaciones asimétricas y los números forman, los tres, un sistema operatorio coherente, a la vez único por sus mecanismos y diferenciado por las tres posibilidades de coordinación de las semejanzas, las diferencias o ambas al mismo tiempo. El proceso de construcción así descripto representa pues una tercera solución, a la vez distinta de la reducción de Russell y de la irreductibilidad postulada por el intuicionismo del número entero. Ésta tercera solución presenta el interés de ser simultáneamente una reducción del número a las operaciones lógicas abordadas como totalidades complementarias (puesto que el número está exclusivamente compuesto de clases y relaciones asimétricas simplemente

agrupadas en forma nueva por la fusión de sus "agrupamientos" respectivos) y una reducción de la lógica al número (puesto que los "agrupamientos" de las clases y las relaciones pueden asimilarse a "grupos" cuya movilidad se limita en provecho de la contigüidad y la dicotomía: véase el punto 3). Ahora bien, esta reducción mutua, por asimilación recíproca, se adecua precisamente al modelo de todas las reducciones conocidas entre dominios semejantes. A lo largo de esta obra tendremos muchas veces la ocasión de examinar este problema.

7. La axiomática del número entero. Hemos comprobado hasta ahora la existencia de dos clases de círculos genéticos. Por una parte, el número entero supone las operaciones lógicas referidas a las clases y las relaciones asimétricas cualitativas, pero estas operaciones lógicas suponen a su vez una cuantificación prenumérica, bajo la forma de las cantidades intensivas "uno", "ninguno", "algunos" y "todos", que se convertirán en numéricas apenas se las separe de las cualidades diferenciales. Por otra parte, el número cardinal supone una ordenación de las unidades necesaria para su diferenciación, mientras que el número ordinal supone la coligación de los términos ordenados, sin lo cual $n + 1$ no podría ser distinguido de n. Ahora bien, estos círculos no molestan en absoluto a los axiomáticos que consiguen reconstruir en forma de teorías coherentes y lineales —es decir exentas de contradicciones y círculos viciosos— las diversas estructuras numéricas, como si ellas subsistiesen en cierto tipo de absoluto una vez que se han formulados los axiomas, las definiciones y los términos indefinibles del punto de partida. Por lo tanto, nos parece indispensable examinar, con un ejemplo particular, cómo puede efectuarse la unión entre el análisis axiomático y el análisis genético, problema que vuelve a encontrarse constantemente y en las formas más variadas en la epistemología psicológica.

Si nos limitamos al número entero, veremos que existe respecto de él gran cantidad de axiomáticas: las de Hilbert, Padoa, Landau, etc. Recordemos simplemente los cinco célebres axiomas de Peano, que bastan para generar toda la numeración una vez que se admiten los tres conceptos fundamentales: el cero, el n (un número cualquiera), y el sucesor (la ley fundamental $+$ que permite pasar de un número a su sucesor): (1) 0 es un número; (2) el sucesor de un número es también un número; (3) dos números nunca tienen el mismo sucesor (o: si los sucesores de dos números son idénticos entonces estos números son idénticos entre sí); (4) el sucesor de un número no puede ser 0; (5) si una clase contiene 0 y un número cualquiera n, y si el sucesor de n también forma parte de ella, entonces esta clase contiene todos los números (principio de inducción completa).

El problema que conviene plantear es entonces el de la determinación de las relaciones entre esta axiomática y los análisis genéticos que preceden, tanto en lo referente a las semejanzas como a las oposiciones y tanto respecto del método como en cuanto a sus resultados.

Se impone, ante todo, una primera semejanza y sean cuales fueren las diferencias entre ambos métodos: ni el análisis axiomático ni el análisis

genético pueden remontarse a un punto de partida absoluto; ambos están condenados a una *regressio ad infinitum* si quieren dejar de lado los datos —datos indemostrables o indefinibles en el caso de los axiomas y los términos axiomáticos inaugurales, y datos inexplicables en el caso de la psicogenesis—. En efecto, en lo que se refiere a la regresión genética, es posible mostrar cómo las operaciones numéricas están preparadas por las operaciones de clases y relaciones, y cómo éstas constituyen el "agrupamiento", por composición reversible, de acciones que encuentran sus raíces en las coordinaciones sensoriomotrices. Sin embargo, afirmar que estas coordinaciones son el resultado de las coordinaciones orgánicas, equivale a no decir nada preciso en cuanto a la explicación del número y remontarse más allá nos conduce a un total desconocido: por lo tanto, la explicación se referirá sólo a los estadios superiores y una vez dados aquellos elementos que la hacen posible.

Ahora bien, paralelamente a esta detención forzada del análisis regresivo, la axiomática se da como punto de partida definiciones y axiomas, pero nunca puede definirlo todo, ni estar segura de haber alcanzado los axiomas más simples, analizados aisladamente, ni los más coherentes. Por lo tanto, no sólo en el punto de partida sino también en la organización previa de los conceptos utilizados para poner en funcionamiento la construcción axiomática, volverán a encontrarse los círculos.

En primer lugar, en lo que se refiere a las definiciones todos sabemos que no pueden definirse todos los términos que intervienen en un sistema abstracto, puesto que sólo se define un término mediante otros términos. Los términos empleados constituyen pues un círculo, y sólo se evita este círculo, desde el punto de vista formal, repartiendo siempre los términos en definibles e indefinibles. Ahora bien, resulta claro que un término nunca es de por sí definible o indefinible, sino que solamente lo es respecto del sistema adoptado. Por lo tanto, siempre se goza de la libertad de elegir los indefinibles y las definiciones (es decir, los términos que se deciden definir y la manera como se los definirá); pero siempre hay términos indefinibles y son tan importantes como los términos definidos, ya que pueden contener una sucesión inagotable de implicaciones operatorias. La regla del juego (al mismo tiempo que el arte de la axiomática) consiste precisamente en utilizar, en la construcción formal, los términos definidos ateniéndose únicamente a la forma en que fueron definidos y reduciendo los indefinibles a un mínimo posible, sin tener que buscar, en consecuencia, qué es lo que ellos encubren. Esto permitirá sobre todo atenerse a los términos ordinales (o cardinales) que uno desee introducir explícitamente, haciendo abstracción de los otros aspectos del número, y la regla del juego prohíbe por supuesto que vuelva a introducirse en el camino lo que al comienzo ha sido separado. Sin embargo, desde un punto de vista epistemológico, y no sólo desde un punto de vista de la técnica formal, la cuestión consiste entonces en saber si estos términos, que se han dejado de lado previamente, realmente pudieran ser descartados o si están siempre presentes (y, en consecuencia, operando) en los términos indefinibles. En otras palabras, la axiomática se restringe, y debe restringirse, a sus "defini-

ciones nominales", pero la epistemología está obligada a descubrir las ideas u operaciones reales que permitieron que ellas fueran formuladas.

En este sentido, la axiomática del número entero de Peano es muy instructiva por la elección de sus tres conceptos fundamentales. En efecto, ¿qué es la idea de sucesor? Se la puede reducir a un mínimo, simplemente como la expresión de la ley que "crea los números unos después de los otros"[36] y cuya aplicación habrá de simbolizarse con el signo +. Sin embargo, aun admitiendo que la construcción se refiera a simples números y que el signo + conserve un sentido puramente ordinal, nos preguntaremos —puesto que se trata de descubrir la significación epistemológica de esta construcción— ¿en qué consiste la sucesión de dos números y cómo puede distinguirse el número $n + 1$ del número n? Ahora bien, definir el concepto de sucesión (aun en el caso de dos números) habrá de comprometer evidentemente toda la lógica de las relaciones asimétricas y hará intervenir rápidamente términos indefinibles de carácter propiamente operatorio, cuyo poder para construir un orden será resultado de la inteligencia (o la acción). En cuanto al empleo de la operación +, que engendra la sucesión (1 número) + (1 número) + (1 número) ... y que traducirá precisamente los términos indefinibles presentes en la idea de "sucesor", siempre estará sometida a la siguiente condición: o bien un número cualquiera no se distingue del anterior salvo porque existe un número cardinal de números ya escritos antes que él, o bien cada número está afectado por un signo distintivo (nombre, etc.) particular. Sin embargo, estos signos distintivos no pueden definirse si no es distinguiendo el número $n + 1$ del número n, por el hecho de que $n + 1$ incluye ya un número cardinal n de números anteriores, mientras que el número n sólo incluye $n - 1$. ¿Se dirá entonces que es inútil contar (cardinalmente) los números puesto que su sucesión ordinal resulta suficiente de por sí y sólo se sustenta en la ausencia de antecedente para el primer número y la sucesión de los antecedentes para los siguientes? Pero precisamente la ausencia de antecedente ordinal significa una clase nula o un número cardinal nulo sin antecedentes y la sucesión ordinal de los antecedentes ulteriores supone un número cardinal de actos a los que hay que recurrir necesariamente para distinguirlos unos de los otros: contrariamente a una seriación simplemente lógica, en la que los términos se distinguen por sus cualidades intrínsecas (por ejemplo $A < B < C$, etc.), sin que sea necesario contarlos para diferenciarlos, los números puros de orden no pueden, en efecto, diferir unos de otros sino por el número cardinal de los antecedentes de cada uno. Si queremos explicitar todo lo necesario, diremos que la operación numérica + implica pues un trasfondo de cardinación presente tras la ordinación: esta cardinación interviene por otra parte de modo explícito en la proposición (5), donde se trata de la "clase" de los números. Por lo tanto, si llegamos a las últimas consecuencias, el número habrá de reducirse a una síntesis de clases y relaciones asimétricas tanto axiomática como genéticamente. Sin embargo, el axiomático se reserva

[36] Gonseth: *Fondement des mathématiques*, pág. 206.

precisamente el derecho de no llegar a las últimas instancias, de no explicitar todo, en lo que se refiere a los términos indefinibles y a la utilización delimitada de las operaciones introducidas, lo cual no le impide luego ser más exigente en cuanto al cuerpo mismo de la construcción formal elaborada mediante ellos.

Examinemos ahora los axiomas mismos. Para la axiomática, se trata de saber si son simples y coherentes, es decir, por una parte, independientes entre sí y, por la otra, no contradictorios entre sí. Gonseth mostró claramente[37] cómo la axiomática se las ingenia para cumplir con estas dos exigencias en forma solidaria ya que "la independencia y la coherencia de un sistema sólo pueden ser tratadas simultáneamente" (pág. 207). Para averiguar si un axioma en juego es independiente se "construyen" sucesivamente axiomáticas que dejan de lado este axioma, ya que estas construcciones pueden desembocar en resultados contrarios al axioma dejado de lado (pág. 37). Sin embargo, únicamente así, de modo indirecto, puede asegurarse la coherencia, ya que no puede mostrarse directamente la no contradicción de un axioma ni la de dos axiomas uno respecto del otro. Para demostrar la no contradicción de un axioma aislado, habría que demostrar antes la no contradicción de la lógica misma: vemos entonces cómo vuelve a aparecer el círculo fundamental común a los análisis genéticos y axiomáticos puesto que, para demostrar la no contradicción de la lógica, es necesario emplear forzosamente esta última. En cuanto a la no contradicción de los axiomas entre sí, sólo se verifica a través del examen de sus resultados, ya que —querer demostrarla directamente— supondría remontarse a todas las verdades previas que implican, lo cual vuelve a conducirnos a la no contradicción de la lógica misma. Los innumerables elementos implícitos en una axiomática se apoyan pues mutuamente en un círculo sin fin, y únicamente el empleo de los axiomas elegidos como puntos de partida convencional de la construcción puede transformar este círculo en una sucesión lineal.

La conclusión a la que nos conducen estas observaciones es que la construcción axiomática es más paralela a la construcción genética de lo que aparenta serlo, aunque la axiomatización rearticule libremente a la segunda. La razón es que si bien se elaboran las diferentes axiomáticas posibles de modo autónomo, algunas conexiones fundamentales son comunes a todas ellas porque traducen precisamente los círculos genéticos. ¿En qué consisten estas conexiones? Conviene aquí introducir una distinción esencial. En una axiomática interviene, por una parte, un conjunto de implicaciones explícitas —las implicaciones entre proposiciones— determinadas por las definiciones del punto de partida. Sin embargo intervienen, por otra parte y como acabamos de ver, relaciones implicitas, en particular, entre las operaciones y los términos indefinibles. Ahora bien, en vez de constituir simplemente implicaciones entre proposiciones, estos vínculos representan implicaciones entre operaciones: por ejemplo, la operación + implica a la vez las operaciones de orden y de recopilación, si se trata

[37] F. Gonseth: *Les fondements des mathématiques*. París, 1926.

de adicionar unidades homogéneas, etc. En consecuencia, estas implicaciones entre operaciones constituyen el correlato de lo que, genéticamente, es la abstracción *sui generis* a partir de las acciones u operaciones anteriores, descripta en el punto 2, y de este modo se apoyan en la generalización por composición operatoria y no por simple encaje de las proposiciones particulares en aquellas que ellas implican. Por esto, los análisis axiomáticos y genéticos son en realidad complementarios y no divergentes. En efecto, una axiomática no se refiere directamente a las operaciones mismas, sino a proposiciones que expresan sus resultados. Por lo tanto, el axiomático sólo se enfrenta con las implicaciones entre estas proposiciones y no con las conexiones previas entre las operaciones, conexiones de las que sólo conserva un mínimo indispensable para cada construcción particular. Por el contrario, el genético se interesa en estas implicaciones entre operaciones y, en este sentido, los dos tipos de investigaciones son complementarias: una se refiere a los vínculos previos o implícitos, sin duda inagotables, y la otra a su explicitación formal, sin duda siempre parcial. Que entre estas dos actitudes —operativa y formalista— hay una posible convergencia, lo testimonia constantemente la historia; pero ella muestra también, y en igual grado, que hay una divergencia aparente como hemos de examinar ahora mediante ejemplos con los números derivados de los enteros positivos y empezando por el número negativo.

8. El número negativo y el cero. La comparación de la historia de los números negativos y la de los enteros positivos resulta singularmente instructiva. Desde el punto de vista operatorio, nada parece más simple que añadir o quitar, en el pensamiento, un primer conjunto a un segundo, aunque éste sea momentánea o definitivamente el más pequeño de los dos; el carácter reversible de las operaciones de adición y sustracción parece implicar sin más la necesidad de completar la sucesión directa de los números enteros positivos por la sucesión inversa de los enteros negativos, siendo éstos la resultante de la sustracción $n_2 - n_1$ si $n_1 > n_2$. La significación de estas operaciones resulta incluso tan general que no aparece como específica del número y se encuentra ya presente en las reuniones y separaciones de las clases cualitativas. Cuando el lenguaje corriente dice "Todos los mamíferos salvo (excepto, fuera de, etc.) los cetáceos tienen patas", expresa la operación B (= los mamíferos) — A (= los cetáceos) = A' (= los mamíferos que no son cetáceos). La clase de los cetáceos quedará entonces afectada por un signo de sustracción (— A) en la transcripción algebraica de esta frase. Si se construye ahora la clase de los vertebrados sin patas, se dirá inversamente "Todos los mamíferos están excluidos de ella, salvo los cetáceos", lo cual se escribirá — (B — A) = — A' o también + A — B = — A', es decir, que la inversión de los signos de la ecuación lógica B — A = A' culminará en el concepto de una clase negativa — A' resultante de la exclusión (sustracción) de un todo — B mayor que la parte conservada + A. En cuanto a las operaciones numéricas espontáneas, comprendimos todos desde siempre, desde su aplicación a los intercambios económicos, o a los caminos recorridos, que al com-

prar más de lo que se ha pagado se contrae una deuda, y que al retroceder más de lo que se ha adelantado se hace en suma una marcha hacia atrás lo cual constituye propiamente un empleo, en la acción misma, del número negativo. ¿Cómo explicar entonces este hecho extraordinario de que los números negativos sólo hayan sido reconocidos en la matemática con la aritmética de Diofantes, y, sobre todo, con los comienzos del álgebra y hayan permanecido extraños al pensamiento común de los griegos? Porque, independientemente de toda axiomática, corresponden las dos actitudes —operatoria y formal— a dos etapas bien distintas en la construcción operatoria misma: la de las operaciones concretas —que consisten en coordinar entre sí las acciones mentalizadas— y la de las operaciones formales —que consisten en reflexionarlas bajo la forma de operaciones simbólicas o hipotético-deductivas y traducirlas en proposiciones—. El hecho de que el número negativo prolonga directamente el número positivo en la primera etapa no implica forzosamente la consecuencia de que el matemático que intenta formalizar las propiedades del número tome conciencia tan rápidamente de los números negativos como de los números positivos, ya que la reflexión sobre las operaciones concretas invertirá el sentido de la orientación y partirá de su resultado antes de alcanzar su mecanismo (lo que precisamente hemos analizado en el punto 7 a propósito de la axiomática del número entero). Por ello el resultado más simple de las operaciones concretas, es decir el número positivo, produce una toma de conciencia muy anterior al número negativo, vinculado al desarrollo del mecanismo operatorio como tal.

Sin embargo hay algo más. A consecuencia de esta misma dificultad de la toma de conciencia de las operaciones en su mecanismo íntimo (sobre la cual volveremos en su forma general en el capítulo 3), el número negativo, una vez formado, puede provocar dudas en cuanto a su valor de conocimiento por causa del realismo del número entero y porque no se puede concebir que el número positivo sea de carácter operatorio.

Así J. D'Alembert, de quien M. Müller expuso la filosofía en un libro fascinante,[38] pensó que la concepción de número negativo resultaba oscura, a pesar de los modelos económicos (deudas) o geométricos (inversión de dirección, etc.) que justifican su empleo en la práctica. Vale la pena examinar los argumentos del autor del célebre principio mecánico que lleva su nombre. Sostuvo que el álgebra es evidente de por sí, o al menos debería serlo, en la medida en que generaliza las primeras ideas basadas en la sensación. Desde este punto de vista, la concepción de número positivo toma su valor por el hecho de que se lo abstrae a partir de conjuntos concretos y de que se relaciona con ellos por el solo intermediario de la designación simbólica. Ahora bien, el número negativo no puede abstraerse de nada sensible, puesto que corresponde a algo inexistente: si se refiere a esta ausencia, ya no es del mismo modo en que el número positivo reúne los términos de este conjunto presente, lo es respecto de una expectativa del sujeto. En otras observaciones, mencionadas por M. Müller,

[38] M. Müller: *Essai sur la philosophie de Jean d'Alembert*. Payot, 1926.

y donde D'Alembert parece haber cambiado de opinión, se dice de los números negativos que son "tan reales como los positivos y sólo difieren por el signo colocado delante de ellos", pero "ese signo sirve solamente para modificar y corregir una falsa suposición" (pág. 83). Ello equivale nuevamente a afirmar que el número negativo difiere de los positivos respecto de la expectativa del sujeto (descubrimiento de una ausencia en el lugar de la presencia), sin por ello corresponder como los positivos a una realidad sensible designada por la lengua matemática.

Estas oscilaciones del gran D'Alembert son singularmente instructivas en cuanto a la naturaleza activa y no estática del número negativo y el número entero en general. En efecto, resulta claro que si se concibe que todos los conceptos matemáticos derivan de la percepción, el número negativo no puede justificarse puesto que corresponde a una ausencia de percepción o, menos aún, que no hay grados en las percepciones nulas. Sin embargo, lo sorprendente es que esta contradicción entre la interpretación sensualista del conocimiento y la realidad matemática no haya conducido a una mente tan orientada hacia lo concreto como D'Alembert a romper con las consideraciones mecánicas y comprender que la propiedad esencial del número no es estática y perceptual, sino dinámica y vinculada a la acción misma, interiorizada en operaciones. Desde este punto de vista, el número negativo puede compararse con el número positivo: es la resultante de la misma acción, en el sentido más estricto del término, pero simplemente orientado en sentido inverso. Añadir una unidad constituye así el número positivo + 1, de la misma manera que quitarla constituye el número negativo — 1. Es cierto que quitar — 1 a una colección ya formada (por ejemplo 5 — 1) parece no conferir a — 1 la cualidad de número negativo, sino que solamente parece ser la aplicación al número 1 de la operación de sustracción; en cambio, quitar — 1 a una colección nula parece constituir una acción imposible, o puramente imaginativa (como se llamará más tarde "número imaginario" a la extracción de la raíz $\sqrt{-1}$). Sin embargo, lo propio de las operaciones mentales es prolongar la acción real, es decir actual y material, en acciones futuras o pasadas, simplemente posibles, o incluso imposibles de realizarse en los hechos: estas operaciones no dejan por ello de ser acciones puesto que quitar — 1 a 0 —lo cual constituye el comienzo de los números negativos en el sentido estricto del término— consiste en comprometerse a quitar — 1 apenas la colección actualmente nula, es decir, dada como un marco sin contenido, se llene con un contenido positivo. Por ejemplo, sucede así con el cálculo de los valores económicos realizados todos los días ante una bolsa o un cofre vacíos.

Aun más, dado que el número negativo es la resultante de las mismas acciones que el número positivo, pero orientadas en sentido inverso, se sigue que el pasaje de estos actos (agregar o quitar) a los aspectos espaciales y cinemáticos de la acción se realiza sin la intervención de nuevas convenciones, que confieren así un aspecto positivo y negativo, no sólo a los números como tales, sino a las unidades de la métrica lineal. Nada más simple, por ejemplo, que componer distancias según que los movi-

mientos se orienten en sentido directo o inverso. Y aun antes de la comprensión de estos conceptos, el niño consigue invertir un orden lineal ABC en una sucesión CBA, lo cual corresponde nuevamente a las operaciones + y —.

. Sin embargo, la mejor prueba del carácter espontáneo de la construcción que se encuentra en la fuente de los números negativos y del hecho de que esta construcción se relaciona con la acción, en oposición a la percepción, es la intervención necesaria de la "regla de los signos" (—) por (—) da (+), en el momento en que se equilibran las operaciones concretas (7 a 8 años), y luego en la lógica corriente de las proposiciones, es decir, en ambos casos, mucho antes que la formule el álgebra de los números negativos. En cuanto a las operaciones concretas, basta por ejemplo presentar a los niños tres elementos ABC fijos sobre una varilla rígida para que, una vez que han comprendido que una rotación de 180 grados de esta varilla (detrás de una pantalla) invierte el orden en CBA, los sujetos puedan —alrededor de los 7 a 8 años— prever que dos rotaciones sucesivas de 180 grados habrán de reestablecer el orden directo ABC. La inversión del orden es la operación negativa; el niño comprende entonces por sí mismo que dos inversiones conducen nuevamente al orden positivo, y esto es lo que propiamente representa la operación (—) $\times$ (—) = (+)[30]. Ahora bien, en el plano de la lógica de las proposiciones, esta regla vuelve a encontrarse en su forma prenumérica en el cálculo de la doble negación (regla de Morgan): "es falso que sea falso = es verdadero", o bien "lo contrario de lo contrario" son, por ejemplo, relaciones que todo sujeto normal comprende a partir del nivel de las operaciones formales.

Ahora bien, estos hechos no sólo prueban con toda evidencia el carácter activo y no perceptual del número negativo, sino que además verifican incluso la hipótesis de carácter también operatorio del número positivo. En efecto, sería inadmisible atribuir a la percepción de colecciones de objetos el origen de los números positivos, es decir, considerarlos como "abstraídos" a partir de estos objetos, puesto que la ausencia de esta percepción no constituye un impedimento para la formación de los números negativos. Sin duda, esta percepción de las colecciones numeradas desempeña un papel en cuanto a la facilidad intuitiva de la acción y, en consecuencia, en cuanto a la toma de conciencia del número positivo y, en este sentido, podemos estar de acuerdo con d'Alembert, pero las facilidades intuitivas no se confunden con las coordinaciones de la acción y la toma de conciencia no es la construcción puesto que a veces invierte su orden genético. El descubrimiento histórico tardío del número negativo respecto de la utilización tan primitiva, no sólo del número positivo, sino además de las operaciones inversas que constituyen, en la acción, el equivalente anticipado de los números negativos, no confirma pues en absoluto el empirismo, o el "sensualismo": conduce simplemente a disociar, desde el punto de vista

[30] Véase Piaget: *Les notions de mouvement y de vitesse chez l'enfant*. París, PUF, 1946, cap. I.

del desenvolvimiento de la historia de las ideas y desde el de la construcción psicogenética, el papel respectivo de los factores de representación y coordinación presentes en la acción operativa, así como su toma de conciencia o su formulación reflexionada. Sin duda, se podría sostener simplemente que el número positivo apareció mucho antes que el número negativo porque es más fácil generalizar una operación directa que su inversa. Sin embargo, esta explicación sigue siendo equívoca, porque no hay operación que sea en sí misma inversa: por ejemplo, sería legítimo considerar que la separación o sustracción son la operación directa y la reunión o adición su inversa, y así sucede en efecto en un universo rigurosamente continuo. Si se emplea el lenguaje contrario y si la sucesión histórica de los descubrimientos reflexivos se inauguró con el del número positivo, es porque la toma de conciencia del mecanismo de las acciones procede de la periferia al centro y comienza por concentrarse en los objetos sobre los que se ejerce la acción más que en sus diversas fases: por lo tanto, resulta más fácil, en el dominio de lo discontinuo, razonar acerca de los objetos reunidos que sobre el acto mismo de la reunión, y así se explica la primacía del número positivo puesto que esta representación periférica que facilita la toma de conciencia no está presente en las colecciones separadas o negativas.

En resumen, más aún que el número positivo, el número negativo da testimonio de la propiedad operatoria del número: no se puede abstraer de los objetos su propia exclusión, como uno se imagina —si sólo se tiene en cuenta el resultado exterior de la acción de reunir— que puede extraerse de las colecciones ya constituidas su pluralidad positiva. El número negativo aparece pues como el modelo de la abstracción a partir de la acción y no del objeto, y esta conclusión confirma lo que ya nos enseñaron los enteros positivos. Sin embargo, más aún que el número negativo, hay un número que, de por sí, hubiera podido servirnos como criterio decisivo: se trata del número cero, que proporciona el prototipo a la vez de una toma de conciencia tardía y de una imposible abstracción a partir del objeto. En efecto, constituye uno de los grandes descubrimientos de la historia de la matemática haber convertido al cero en un número, ya que si el cero lógico ("ninguno") es, sin duda alguna, tan viejo como el lenguaje mismo (y quizás incluso el "no" ha precedido siempre al "sí"), fue necesario vencer las mismas dificultades para poder tomar conciencia del cero aritmético que en el caso del número negativo. Ahora bien, la causa de estas dificultades aparece aquí muy claramente: si la toma de conciencia se remonta de la periferia al centro, la última de sus etapas consistirá seguramente en observar que una ausencia de operación sigue siendo una operación. En tanto se ha buscado el número en el objeto, la sucesión de los números comenzó, en consecuencia, por 1. Transformar al cero en el primero de los números consiste, por el contrario, en renunciar a abstraer estos números a partir del objeto (el cero lógico basta para expresar su ausencia) y extraerlos únicamente a partir de las operaciones; y toda operación aditiva compuesta con su inversa culmina entonces en esta operación fundamental que es la ausencia de toda operación, es decir, la "operación idéntica" 0.

9. El número fraccionario y el número irracional. Como el número negativo, el número fraccionario presenta el problema de las relaciones entre la acción operatoria y la representación perceptual y, en consecuencia, entre las dos clases de abstracciones, a partir de la acción o a partir del objeto mismo. Si bien ha aparecido más tarde que el número entero positivo, el número fraccionario también vio favorecida su formación por consideraciones perceptuales fundadas, en este caso, en el fraccionamiento de los objetos continuos y los conjuntos discontinuos. En efecto, la importancia de la repartición fue decisiva para su descubrimiento y la preponderancia atribuida a menudo a la partición de los objetos continuos —por ejemplo un campo o una torta— ha conducido a algunos autores a atribuir al número fraccionario un origen más espacial que puramente aritmético, y (lo cual no es en absoluto lo mismo) más perceptual que operatorio. Se trata pues de examinar cómo la consideración de la relación entre las partes en el interior de un mismo todo ha impuesto el concepto de número fraccionario: ¿es en virtud de coordinaciones operacionales análogas a las que acabamos de ver obrar en la construcción del número entero positivo o negativo? o bien ¿la intervención de la percepción y la representación intuitiva aparece, en este caso, como siendo necesaria en un sentido que implica la abstracción a partir del objeto?

En un interesante fragmento de sus *Etapas*, L. Brunschvicg se opone al esfuerzo realizado por Riquier para justificar la independencia de los fundamentos aritméticos del número fraccionario respecto de las consideraciones físico-aritméticas: "Para nosotros, la aritmética de los números enteros ya es una disciplina físico-aritmética, y ello le otorga su valor de ciencia. A partir de entonces, si queremos conservar este valor, debemos mantener en el dominio de las fracciones el mismo orden de conexión que en el dominio de los números enteros, y concebir que a las transformaciones mentales efectuadas sobre las expresiones fraccionarias corresponden las transformaciones efectuadas sobre las cosas".[40] Resulta claro que si se entiende por "físico-aritméticas" las operaciones susceptibles de "efectuar transformaciones sobre las cosas", nos adherimos a la doble tesis de Brunschvicg acerca de la continuidad entre el número entero y el número fraccionario y el carácter operatorio de este tipo de números. Pero no hay porque deducir a partir de ahí que los números fraccionarios se abstraen de los objetos físicos —puesto que consisten en acciones y operaciones ejercidas sobre estos objetos y, por lo tanto, se los extrae del mecanismo de la acción— ni tampoco que la experiencia física es semejante a la operación matemática. Por más insensibles que sean las transiciones entre las dos clases de conocimientos, la experiencia física se inicia cuando —además de las operaciones extraídas de la coordinación general de las acciones— interviene una abstracción a partir del objeto mismo: el conocimiento físico supone, en efecto, un conjunto de acciones especiales, que ya no se limitan a reunir o separar, en hacer corresponder por asociaciones o en dividir, etc., es decir, en utilizar los aspectos más

[40] L. Brunschvicg: *Les étapes de la philosophie mathématique*, 2ª ed., pág. 492.

generales y la coordinación misma de las acciones, sino que se refieren a las cualidades particulares (velocidad, tiempo, fuerza, etc.) que distinguen a los objetos como tales. Desde este punto de vista, resulta evidente que el número fraccionario sigue siendo, como el número entero, relativo a la coordinación operatoria y no hace intervenir para nada estas acciones especiales.

No por ello es menos cierto que, en el caso de los números fraccionarios así como en el caso de los enteros positivos y negativos, la toma de conciencia que ha condicionado la evolución histórica del concepto se concentró, en primer lugar, en las representaciones perceptuales o imaginadas antes de descubrir el elemento propiamente activo y operatorio que constituye el verdadero motor de esta generalización del número. Por ello, se ha atribuido tan a menudo el origen de los números fraccionarios, por una parte, a la experiencia física del fraccionamiento (opuesta a la acción de repartir) y, por la otra, a consideraciones numéricas: de donde la hipótesis acerca de que el número fraccionario es la resultante de preocupaciones espaciales más que numéricas.

El argumento más frecuentemente empleado, en favor del origen espacial de las fracciones, es que la unidad numérica es indivisible y que sólo las unidades métricas son divisibles en tanto la medición se aplica al continuo espacial y al de los objetos físicos. Ahora bien, esta cuestión de la divisibilidad de la unidad plantea precisamente un problema genético interesante en cuanto a las relaciones de la medición espacial y del número y que domina, en consecuencia, la problemática del origen del número fraccionario. En efecto, como volveremos a verlo en el capítulo 2, sucede que la medición presenta un modo de formación estrictamente comparable al del número, y ese paralelismo constituye por otra parte de por sí un argumento de peso en favor de la interpretación defendida en el punto 6. Todos estarán de acuerdo en admitir que la constitución de la unidad métrica es la resultante de una síntesis operatoria entre la partición y el desplazamiento: medir un todo mediante una de sus partes consiste en desplazar sucesivamente sobre las otras la parte elegida como unidad, de tal modo que se asegure una sucesión de igualaciones por congruencia, y se reduzca así el todo medido a un múltiplo de la unidad reiterada. Ahora bien, se percibe de inmediato que la partición representa, en el terreno de las cantidades continuas, el equivalente de la adición de los elementos en el dominio de las clases encajadas, y que el desplazamiento sucesivo equivale por su parte a la seriación en el dominio de las relaciones asimétricas. En efecto, así como pueden reunirse, de modo contiguo y dicotómico, objetos discontinuos en clases y estas clases elementales en clases de orden superior, etc., según la estructura de los "agrupamientos" cualitativos (o "intensivos") descriptos en los puntos 3 y 6, así se pueden adicionar entre sí los elementos finitos de un continuo obtenidos por simple partición (por ejemplo los segmentos de una recta), y constituir pares contiguos que se encajan cualitativamente según la misma estructura ($A + A' = B$; $B + B' = C$, etc.). Ya sean encajes de clases elementales en clases de

rango progresivo, o bien reuniones de partes contiguas en totalidades de orden creciente, se trata de dos clases de operaciones semejantes y que aparecen, en el niño, al mismo nivel genético. La única diferencia es que el producto de la primera de estas dos operaciones es una clase de elementos discontinuos y el producto de la segunda es un objeto sin interrupción; entonces el entorno reemplaza a la semejanza que constituye el principio de formación de las clases: puede llamarse "lógico" al primer conjunto de operaciones que toman al objeto como punto de partida y culminan en la clase, e "infralógico" al segundo tipo que culmina en la construcción del objeto como punto de llegada y procede de sus elementos o partes. Asimismo, la seriación de las relaciones asimétricas constituye un "agrupamiento" de operaciones lógicas, que conserva el orden (directo o inverso) entre los elementos seriados, mientras que el desplazamiento aparece genéticamente como siendo, en primer lugar (es decir anteriormente a toda medición), un cambio de orden o emplazamiento, es decir, una operación infralógica constitutiva de un nuevo orden. Abordado bajo este ángulo cualitativo, el sistema de los desplazamientos tal como lo construye el niño que no puede aún realizar medición alguna, constituye entonces, él también en primer lugar, una simple agrupación cualitativa. Ahora bien, al utilizar al mismo tiempo la partición y el desplazamiento, el sujeto conseguirá igualar (por congruencias concretas) una parte dada con las otras partes de un mismo todo y reducir así el todo a un múltiplo de la unidad elegida, exactamente del mismo modo como obtiene el número por fusión del encaje de las clases con la seriación de las relaciones asimétricas: la medición aparece entonces genéticamente de la misma manera que el número, y las dos construcciones son semejantes en todos sus aspectos salvo uno: una es de carácter lógico-aritmético y la otra infralógico.

¿En qué se convierten entonces las cuestiones de la divisibilidad de la unidad y del origen de los números fraccionarios? El análisis genético proporciona, en este sentido, tres clases de resultados. En primer lugar, no es cierto que el concepto de fracción se descubra en el terreno infralógico de los objetos continuos antes de que se lo descubra en el de los conjuntos discontinuos de carácter lógico-aritmético; estas dos clases de fracciones se construyen sin duda simultáneamente. En efecto, al nivel de las operaciones concretas, la unidad sigue siendo relativa a la realidad enumerada o medida, de tal modo que en presencia de algunas bolitas o fichas, puede concebirse la unidad tanto como la colección misma (el "montón", etc.) o como el objeto individual: el niño concebirá entonces tan fácilmente las fracciones simples de la mitad (1/2), el cuarto o incluso el tercio si decide dividir la colección en dos mitades, en cuatro cuartos, etc., como si se tratase de las dos mitades o los cuatro cuartos de una torta. Y si logra de por sí en ambos casos comprender fácilmente estas fracciones a cierto nivel de desarrollo, las dificultades serán las mismas en los niveles anteriores y tenderán (también en ambos casos) a una incomprensión de las relaciones entre la parte fraccionada y las otras, así como entre ella y el todo: "la mitad de la mitad" provocará por ejemplo las mismas oscilaciones

iniciales en el caso de la torta que en el caso de la colección que se habrá de repartir, porque se carece de un esquema de encajes y comparaciones entre las partes mismas.

En segundo lugar, aun en los casos en que la noción de fracción aparece en el terreno de los objetos continuos y del espacio antes de aplicarse a las colecciones numéricas, el estrecho isomorfismo entre las operaciones infralógicas y las operaciones lógico-aritméticas, por lo tanto entre la formación de la medición y la del número, suprime toda oposición epistemológica entre la fracción métrica y la fracción numérica: ambas suponen el mismo pasaje entre la acción, acompañada de intuición perceptual, y la operación reversible concreta y, en ambos casos, la relación expresada por el fraccionamiento sólo es una generalización de las operaciones que conforman el número (ya se presente el número como unidad métrica o como unidad simple).

En tercer lugar, toda diferencia entre las operaciones infralógicas y lógico-aritméticas desaparece en el plano formal, y las dos clases de operaciones se traducen entonces en forma de proposiciones y las relaciones de partición, desplazamiento y medición se reducen, en el hecho mismo, a relaciones lógicas o lógico-matemáticas como las restantes. En realidad, se puso de manifiesto, en el plano formal, la homogeneidad completa del número fraccionario y el número entero a través de la teoría de los pares desarrollada por Weierstrass y ampliada a los números complejos por Hänkel: en este esquema, todo número puede representarse por un par y ya no existe distinción alguna entre los números fraccionarios y las otras categorías de números.

El descubrimiento del número irracional planteó, en una forma nueva, el problema de la oposición aparente y el isomorfismo real entre las operaciones aritméticas y las operaciones geométricas. El descubrimiento de esos números —resultado del desarrollo, generalmente atribuido a Teodoro de Cirena, de las raíces de enteros que no son potencias perfectas, o bien de la comprobación de la inconmensurabilidad de la relación entre el lado y la diagonal de los cuadrados (en un cuadrado de lado 1, por ejemplo, la diagonal es en virtud del teorema de Pitágoras $\sqrt{2}$ que es inconmensurable)— estuvo, como todos sabemos, en el punto de partida de la crisis del pitagorismo. Hubo que proclamarse el divorcio entre las relaciones numéricas simples y las relaciones espaciales elementales: la continuidad de esas relaciones espaciales parecía ser irreductible a los números enteros, así como a las fracciones "racionales" —este término señala bastante bien el juicio de valor en nombre del cual se considera que únicamente ciertas relaciones agotan la propiedad del número—. La crisis sólo culminó, en realidad, con el análisis infinitesimal, en primer lugar, y, en particular, con la doble construcción —geométrica y aritmética— de lo continuo. Por una parte, Weierstrass proporcionó simultáneamente la expresión del continuo geométrico y la demostración de que los números racionales no pueden corresponder término a término al conjunto de los números reales, porque los primeros son insuficientes para llenar el intervalo entre dos números cualesquiera. Por otra parte, Dedekind y Cantor anali-

zaron el continuo geométrico mediante el método de los cortes y los encajes convergentes, y definían en cambio paralelamente los números irracionales, el primero mediante cortes análogos y el segundo mediante las series cuyos límites son estos números irracionales. Por otra parte, sabemos que los números irracionales tienen múltiples propiedades: unos son "algebraicos", otros son "trascendentes", como los números π y e, cuya significación geométrica conocemos y que no son las raíces de ecuación algebraica finita alguna (por ello, corresponden a los casos previstos por Abel y Calois según los cuales las raíces de una ecuación entera no son la resultante de simples combinaciones algebraicas). En consecuencia, se acepta concluir que —aun cuando los números irracionales hayan podido ser la resultante de consideraciones geométricas y, en particular, cuando se ha construido el continuo aritmético, posible gracias a ellos, para que pueda coincidir con el continuo espacial— los números irracionales corresponden a una construcción autónoma. Constituyen entonces el punto de unión entre las operaciones que, genéticamente, provienen de los dos dominios paralelos de lo infralógico y lo lógico-aritmético e incluso a través de esta función dan un testimonio del isomorfismo de las construcciones numéricas y las construcciones espaciales.

En resumen, como los números fraccionarios, los números irracionales verifican en realidad la independencia y el paralelismo entre las operaciones aritméticas y geométricas, aun cuando este paralelismo se presente al comienzo como ausente en el caso de los segundos, mientras que surge de entrada en el caso de los primeros (y aunque en ambos casos se hayan podido encontrar objeciones a esta independencia). Desde el punto de vista genético, este mismo equilibrio alcanzado por dos sistemas operacionales, independientemente de las circunstancias que dieron lugar a los descubrimientos o que motivaron las tomas de conciencia, muestra de modo suficiente hasta qué punto la coordinación operacional se libera de los objetos a los que se refiere en el punto de partida, porque es la resultante de las acciones del sujeto en oposición a los datos perceptuales o las intuiciones imaginadas.

10. Los NÚMEROS COMPLEJOS, LOS CUATERNIONES Y LOS OPERADORES. Con la construcción de los números imaginarios o complejos, contrariamente al caso de los números negativos, fraccionarios e irracionales, ya conocido desde la antigüedad, abordamos una generalización del número que, de entrada, adquirió una forma operacional, sin intervención inicial de las contingencias sensibles o incluso geométricas. El problema consiste entonces en precisar el sentido de estas puras operaciones: ¿han permanecido en el estado de simple simbolismo formal, o bien se reúnen, pero esta vez a posteriori y en consecuencia de modo imprevisible al comienzo, con las consideraciones geométricas o incluso físicas?

El concepto de número imaginario $\sqrt{-1}$ —aplicación de la operación de extracción de raíz cuadrada a los números negativos (generalización impuesta entre otros motivos por la solución de las ecuaciones de segundo grado)— proporciona el modelo de una "experiencia mental" aparente-

mente sin objeto alguno, puesto que no existe cuadrado negativo, o puesto que el número negativo no es un objeto excluido o sustraído del dominio de experiencia considerada. La experiencia mental, a la que recurren los empiristas como prueba de la sumisión del espíritu a lo real, es en efecto aquí lo mismo que hemos visto en el caso de la construcción del número entero: la reproducción mental de una acción o una operación, independiente de los caracteres del objeto al que se refiere, y no la reproducción de una realidad independiente del acto, puesto que precisamente el número imaginario comenzó sólo por constituir el esquema de una operación sin objeto. Por cierto, este esquema constituye la prolongación, en lo virtual, de operaciones que en su origen son reales, pero ¿cómo una acción, real en su punto de partida, como lo es la extracción de la raíz (caso particular de la división) puede prolongarse sin objeto de aplicación alguno. si desde este mismo comienzo la operación sólo consiste en algo yuxtapuesto al objeto y no extraído o abstraído de los objetos? ¿y si entonces el esquema operatorio fuera un esquema de asimilación (siendo ésta por definición una adjunción al objeto) y no una simple acomodación? Cuando la física aplica a otra escala (mayor, o más pequeña), los conceptos resultantes de una abstracción de las cualidades observadas en nuestra escala, esta extrapolación ilegítima conduce a toda clase de dificultades (tiempo absoluto que puede aplicarse a grandes velocidades, concepto de corpúsculos permanentes no aplicable a la escala microfísica, etc.): precisamente se trata entonces de abstracciones a partir del objeto que no pueden utilizarse fuera de su contexto de observación. Si la extracción de la raíz cuadrada es la resultante de una abstracción del mismo tipo que la de una cualidad física extraída de la experiencia, su empleo se convierte simplemente en un absurdo cuando se va más allá de los límites de lo real. Como generalización de una acción que añade sus efectos al objeto y que, en consecuencia, puede dejarlo de lado, el símbolo $\sqrt{-1}$ es, en cambio, totalmente inteligible, así como lo es el símbolo $+1$. Por más "imaginario" que sea el número $i = \sqrt{-1}$, que efectivamente no proporciona solución real alguna en tanto raíz de una ecuación, significa que $i^2 = -1$. "Sin duda, no es contradictorio hacer que esta proposición se apoye en una convención arbitraria. Sin embargo, quedaría aún por explicar, como señala profundamente L. Brunschvicg, cómo la cantidad -1, resultante del producto de los dos símbolos $(i \times i)$, pudo identificarse con la cantidad -1 que, para nosotros, es el resultado natural y verdadero de una operación como $1 - 2$, sin que esta identificación haya comprometido el equilibrio y la homogeneidad del sistema de la ciencia" (*Etapas*, pág. 543). Ahora bien, Weierstrass y Dedekind mostraron que la existencia de los números complejos es necesaria para que el álgebra alcance toda su extensión; en cambio, Gauss los introdujo en la teoría de los números. Se constituyó así un álgebra de los números complejos, de forma $(a + bi)$ que conserva las leyes de conmutatividad y completa necesariamente al álgebra ordinaria.

Sucede algo sorprendente: esta operación sin objeto en su punto de partida, el número imaginario, no sólo se incorporó de modo más estrecho

al sistema de las operaciones aritméticas y algebraicas referidas a los conjuntos de objetos, sino también adquirió una significación geométrica que interviene en el interior de las operaciones que conforman al objeto mismo puesto que la estructura del objeto es, en primer lugar, espacial. Más allá de la geometría, intervino incluso, a través del cálculo de vectores y cuaterniones en la construcción de los "operadores", cuyo empleo se generalizó luego y se reveló como fundamental para la física moderna. Por lo tanto, puede decirse que lo "imaginario" se ha reunido con lo real, como si un sistema de operaciones realizadas sin objeto alguno hubiera constituido un esquema operatorio susceptible de aplicarse ulteriormente a las particularidades de los objetos ignoradas por las operaciones reales iniciales.

El principio de la geometría analítica consiste, todos lo hemos aprendido en la escuela, en expresar mediante números positivos las distancias trasladadas a lo largo de una recta fija en uno de los dos sentidos de orientación, y en expresar mediante números negativos las distancias trasladadas en sentido contrario. Lo esencial de la representación geométrica del carácter positivo o negativo de los números consiste pues en que traduce el número en forma de *direcciones*; y los números, independientemente de sus signos, representan *longitudes*. Ahora bien, a fines del siglo XVII Wallis ya había propuesto que se representasen las raíces imposibles o "fingidas" —como se decía en aquel entonces—, de una ecuación cuadrática pasando *fuera* de la recta sobre la que se hubieran trasladado los valores de estas raíces si ellas hubieran sido reales. Resulta entonces que, para dos ejes rectangulares, las cantidades se suceden durante una rotación en el sentido positivo (opuesto al de las agujas de un reloj) en la serie: $+1$; $\sqrt{-1}$; -1; $-\sqrt{-1}$. "En esta serie —dice P. G. Tait[41] (un alumno de Hamilton)— cada uno de los términos es deducido a partir del precedente al multiplicar este último por el factor $\sqrt{-1}$. Tenemos así el derecho de concluir que $\sqrt{-1}$ es un *operador*, cuya aplicación opera de manera análoga a la de una manivela que haría girar un angulo de 90 grados en el sentido positivo; todo segmento de recta pasa entonces por el origen y debe moverse en el plano *x y*" (pág. 2). Se comprueba con sorpresa que la operación sin objeto, específica del símbolo de las raíces imaginarias, una vez representada en términos de cantidades situadas "fuera" de una recta dada, se puede asimilar a la acción de una manivela que haría girar esta recta. Desde el punto de vista genético, la operación inicial, vacía de todo contenido, casi podría compararse con esos esbozos embrionarios que culminan antes de término en la formación de un órgano, que sólo entrará en funcionamiento mucho más tarde, a lo largo de la vida de un ser organizado.

Hay algo más. Después de los trabajos de Moivre, Argand, Warren y Servois, Hamilton consiguió generalizar el uso geométrico de la expre-

[41] P. G. Tait: *Traité élémentaire des quaternions*. Trad. Plarr. París. Gauthier-Villars, 1882.

sión $\sqrt{-1}$. Mientras sus predecesores eligen una dirección particular del espacio para representar las cantidades reales y llaman imaginarias a las direcciones orientadas fuera de la primera, Hamilton consigue tornar imaginarias "todas las direcciones sin excepción alguna" (Tait, *loc. cit.*, pág. 7), lo cual equivale a volver geométricamente homogéneas estas direcciones y permite constituir un método de cálculo independiente de los ejes de las coordenadas. Se trata del cálculo de los cuaterniones, que equivale a multiplicar dos birradiales (o relaciones entre dos vectores que tienen un origen común), y que se aplica así sobre un conjunto de cuatro términos, uno real y tres imaginarios ($Q = Q_0 + Q_1 i_1 + Q_2 i_2 + Q_3 i_3$). Un vector es un símbolo que representa una recta de cierta longitud y cierta dirección (lo cual implica entonces tres números), uno de los dos vectores paralelos puede considerarse como múltiplo del otro por un factor numérico (la relación entre sus longitudes con signo + ó — según que tengan o no el mismo sentido); si no son paralelos, el multiplicador necesario para operar el cambio de uno a otro depende entonces de cuatro números. Este cálculo de los cuaterniones, seguido por el cálculo de la extensión de Grassmann, presenta, como este último, el carácter sorprendente de liberarse de la regla de conmutatividad propia de la multiplicación ordinaria (puesto que la adición esférica no es conmutativa, tampoco puede serlo la multiplicación de los birradiales). Constituyen así una nueva álgebra más complicada que la de los números complejos.

Ahora bien, tanto este fenómeno de no conmutatividad de estas formas de cálculo, como el carácter de operadores específico de los cuaterniones y de muchas otras estructuras cuya construcción fue posterior a ellos, ejercieron una importante influencia sobre el desarrollo de la física, puesto que hoy las álgebras no conmutativas se emplean en microfísica y los operadores y matrices desempeñan un papel considerable en la expresión de las leyes cuánticas (véase capitulo 7, en el punto 4). La microfísica contemporánea se alimentó entonces en las estructuras operatorias construidas desde hacía ya mucho tiempo, y de ellas tomó un conjunto de conceptos preparados por los matemáticos y cuya génesis, contemporanea de la teoría de los grupos, mucho le debe a las algebras generalizadas por la influencia de los números complejos. Sin embargo, el número imaginario no sólo interviene en los operadores microfísicos: está presente en cualquier transformación que implique un juego de vectores. Por ejemplo, la descripción de una corriente alternada por la proyección de las fases sucesivas recurre habitualmente al empleo de los números complejos. Generalmente estos números complejos se emplean apenas hay que señalar el vinculo entre elementos cuando uno de ellos permanece en el exterior del sistema formado por los otros y al mismo tiempo ejerce una influencia sobre él.

Este destino geométrico y luego propiamente físico de una operación primitivamente sin objeto alguno pero que adquiere luego el sentido de un operador vinculado a las direcciones del espacio y las rotaciones y

luego interviene por último en el seno de los operadores más esenciales que emplea la física contemporánea, esclarece de modo más significativo el papel de las operaciones en la construcción del número en general. Contrariamente al caso de los números enteros positivos y los números fraccionarios —donde la acción de reunir o dividir parece sugerida por la realidad sensible que constantemente imita, por sus uniones o sus fraccionamientos, la operación humana correspondiente—, el número imaginario surgió sin sugerencia alguna de la experiencia perceptual. Sin embargo, mientras la sucesión de los números enteros cada vez más grandes o de las fracciones cada vez más pequeñas se aleja siempre más de lo real inmediato en las direcciones ∞ ó 0 —lo cual no impide, por otra parte y en absoluto, que sirvan como instrumentos de adaptación a la experiencia física—, el número imaginario adquiere este papel de instrumento adaptativo sin conexión aparente alguna con las circunstancias que motivaron su construcción. ¿Cuál es pues la verdadera conexión entre esta operación $\sqrt{-1}$ y lo real, disimulada bajo la aparente ausencia de relación?

Resülta claro que la operación de extracción de la raíz cuadrada de una unidad negativa es incomprensible como acción aislada, puesto que se trata de una acción imposible de ser ejecutada materialmente: esta operación sólo tiene entonces significación en función de la totalidad de las operaciones numéricas, lo cual equivale a decir que es el resultado de la coordinación de las acciones entre sí y que no constituye una acción que pueda aislarse. Ahora bien, es en esta coordinación donde precisamente hay que buscar el secreto de la adaptación de las operaciones matemáticas a lo real. ¿Cómo explicar que una operación inventada de algún modo para la simetría (del mismo modo que las falsas ventanas añadidas en los lugares donde se esperan las verdaderas) se reúna en un momento dado con el cálculo geométrico e incluso con la física? Si este encuentro producido a posteriori debe explicarse por el hecho de que la división siendo la extracción de la raíz cuadrada sólo un caso particular de ella, nació a partir de la experiencia física, ello equivale entonces a afirmar que la adaptación que se adquiere cuando se divide un campo o una torta es lo suficientemente precisa como para que las reglas, extraídas a partir de esta acción, se adapten de antemano al cálculo de los vectores y los operadores, aun en los casos en que ya no se puedan asignar trayectorias, ni haya objetos permanentes como en el campo de la microfísica. Por el contrario, afirmar que el encuentro entre lo real y los números imaginarios (encuentro que se produce mucho después de la construcción de estos últimos) tiene la misma propiedad que la convergencia inmediata de los números enteros positivos con las realidades elementales —porque ambos se preocupan por la concordancia entre la coordinación de conjunto de las operaciones y las transformaciones físicas fundamentales— consiste simplemente en suponer que las estructuras de composición reversible alcanzadas por los agrupamientos y los grupos de operación expresan a la vez las leyes más generales de la coordinación de las acciones del sujeto y las interacciones más directas entre el sujeto y lo real. Se debe concebir que tanto esta coordinación como estas interacciones, al mismo tiempo que se dife-

rencian en el transcurso de la experiencia, no provienen de la experiencia externa, porque son las únicas que la hacen posible, sino que surgen de las condiciones mismas de la organización psicobiológica.

La reflexión acerca de los imaginarios conduce pues a una verificación privilegiada de la interpretación operatoria del número, no sólo porque este tipo de número se vincula con la coordinación de conjunto del sistema, sino también porque culmina en el descubrimiento del carácter propio de los esquemas de operaciones alejadas de la realidad concreta: el carácter de "operadores". En este sentido, necesariamente tenemos que preguntarnos a partir de qué momento los números constituyen operadores. Es claro que ello se produce no solamente más allá de cierta capacidad para expresar algunas transformaciones geométricas o físicas, ya que el cálculo de los operadores y las matrices tiene un empleo cuya generalidad supera a la geometría y, en particular, a la física. Puede sostenerse incluso que si, técnicamente, el término operador debe conservarse para los sistemas de operaciones de grados superiores —es decir, para los esquemas que permiten operar abstractamente sobre un conjunto de operaciones subordinadas—, en realidad el papel de operador puede atribuirse a las operaciones numéricas más elementales. Más precisamente, todo número puede ser considerado como el resultado estático de una operación o como el operador en su dinamismo formador: por ejemplo en la expresión $n + 1$ ya puede considerarse a n como un número estáticamente dado y a $+ 1$ como el operador que transforma a n en su sucesor. De modo general, sólo existe pues una diferencia de grado o de complejidad entre las operaciones elementales y los operadores, pero las primeras se han hecho tan automáticas que han perdido su apariencia activa. Por lo tanto, sólo en el caso de los operadores de orden superior, es decir, suficientemente abstractos como para que la diferencia entre lo dado y la transformación operatoria sea sensible en cada instante, es que este concepto central adquiere su verdadera significación. Sin embargo y desde el punto de vista genético, no hace sino confirmar el carácter esencialmente operatorio del número, carácter que pone de manifiesto desde la fusión de los encajes de clases y las sucesiones de relaciones asimétricas que, a través de su síntesis, generan el número entero.

11. Lo infinito y el carácter operatorio del número. El problema del infinito actual siempre opuso del modo más radical las interpretaciones realistas y las interpretaciones operatorias del número. No porque resulte contradictorio concebir un realismo de lo finito, como ha sucedido desde Pitágoras a Renouvier; pero, querer situar un infinito actual en el mundo, de lo real o bien de las ideas, a la manera en que el realismo concibe los números finitos, presentó, toda vez que se ha planteado el problema a lo largo de la historia, una serie de dificultades siempre semejantes. Ahora bien, sólo pueden ser evitadas recurriendo, de modo implícito o explícito, al dinamismo intelectual de las operaciones, único soporte legítimo de las diversas formas de infinito, porque sustituye la realización actual por la virtualidad de un desenvolvimiento ilimitado.

Sabemos cómo la utilización de las series indefinidamente decrecientes por el cálculo infinitesimal planteó el problema del infinito a lo largo de los siglos XVII y XVIII. Una serie como $1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots$ que tiende a igualar la unidad, ¿alcanza acaso en algún momento esta igualdad... $= 1$, puesto que por ser infinita, es propiamente inagotable? Razonando acerca de lo real "operado" y no sobre las operaciones, Zenón tuvo razón en declarar que la flecha no alcanzaría jamás su meta, ya que cuando se quiere recortar efectivamente una distancia según una serie, hay que contar con toda la eternidad. Sin embargo, lo propio de una operación intelectual, como la división por la mitad, radica en poder prolongar las operaciones reales iniciales con operaciones virtuales, cuya validez es el resultado de su posible composición y únicamente de ella: por lo tanto, es legítimo reunir en un solo acto global la composición del conjunto de estas operaciones, repetidas indefinidamente, y concluir en la igualdad $1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots = 1$. Pero, ¿dónde ha de situarse entonces lo infinitamente pequeño? ¿Se puede asignar a la fracción $1/n$ cierto valor estático porque constituye el último elemento antes del 0, es decir, el más pequeño que hay que agregar a la serie para que ésta sea igual a 1? Dicho de otro modo, ¿existe un infinito pequeño actual? Es claro que esta hipótesis es contradictoria, en la concepción operatoria del número, ya que si se trata de construir este infinito pequeño actual mediante una operación también actual, por lo tanto ejecutada como operación distinta de las anteriores, nunca se lo alcanzará; y si se trata de contentarse con una operación virtual, es decir, precisamente con esas operaciones que es legítimo reunir en un todo para que la serie sea igual a 1, lo infinitamente pequeño también es virtual: ahora bien, ello significa —hablando con propiedad— que no es legítimo extraer de la sucesión $1/2 + 1/4$ $1/8 + \ldots = 1$ esa operación virtual, ya que su validez sólo es el resultado de la composición de la sucesión y puesto que, al querer actualizar uno de los elementos de la serie, uno se ve obligado a hacer lo mismo con los otros, lo cual nos conduce a una sucesión sin fin. Lo infinitamente pequeño no puede aislarse en forma actual salvo apoyándose en una creencia realista o extraoperatoria, obligada además a completar la realidad física, siempre finita, con la realidad de números ideales que subsistirían de por sí. La arbitrariedad de esta hipótesis hizo que, en primer lugar, se justificara el cálculo infinitesimal mediante el argumento pragmatista de su éxito, pero la necesidad de esta justificación revela con toda seguridad un frustrado realismo, comparable al de d'Alembert cuando buscaba una realidad que correspondiera al número negativo. En realidad, la idea de diferencial, que sustituye la relación de las cantidades finitas Dx/Dy por la relación dx/dy nunca hace intervenir lo infinitamente pequeño como valor estático o actual, sino únicamente la relación entre dos cantidades decrecientes indefinidamente. Por lo tanto, sólo hay una manera de evitar los callejones sin salida a donde nos conduce el realismo de lo infinitamente pequeño: considerar con Leibniz —magníficamente interpretado por L. Brunschvicg— al infinito como la expresión del dinamismo mismo de la construcción operatoria.

Este problema volvió a aparecer con el análisis de las funciones indefinidamente crecientes, es decir, en el terreno de lo infinitamente grande. En estas investigaciones acerca de la "teoría general" de las funciones, que se oponen a la reducción del análisis en el esquema del número entero, Dubois-Reymond intentó descubrir las condiciones comunes de convergencia y divergencia de diversas operaciones infinitas. Al estudiar las diferentes velocidades de crecimiento, termina en un "cálculo infinitario" que define series de tipos crecientes u órdenes progresivas de infinito. Sin embargo, nuevamente aquí surge el problema operatorio: la escala de las funciones ¿alcanza uno o varios infinitos actuales, que trascenderían las operaciones mismas que permiten alcanzarlas, o sólo se aplica a las operaciones como tales?

Precisamente, procediendo de la operación a sus resultados, G. Cantor fundó un cálculo del "transfinito" sobre la consideración de las relaciones de correspondencia entre conjuntos. Así, el conjunto de los números enteros corresponde de modo biunívoco al de sus cuadrados, o al conjunto de los números pares, etc. El conjunto de todos estos conjuntos será pues la clase de los conjuntos enumerables. Ahora bien, esta clase no corresponde al conjunto de los números reales (racionales e irracionales) que es pues una potencia superior, o potencia de lo continuo. Admitido esto, la sucesión de los números enteros es infinita, es decir que es imposible asignarle un fin, y absurdo buscar, en el interior mismo de este conjunto, un número infinito actual que constituiría el último de la serie. En cambio, se puede asignar a esta sucesión un límite que por definición será exterior a la serie y a partir de la cual comenzará una nueva sucesión: este primer "ordinal infinito" ω será pues el primer número que seguirá a la serie de los números enteros sin pertenecerle. Gracias a la repetición misma de este procedimiento, se obtendrán entonces los transfinitos $\omega + 1$; $\omega + 2 \ldots$; $\omega + n$; 2ω; $2\omega + 1$; $2\omega + 2 \ldots$; $3\omega \ldots$; $n\omega$; ω^{ω}; $\omega^{\omega^{\omega}}$; etc. Estos ordinales transfinitos constituyen así órdenes. En cuanto a los cardinales transfinitos, el primero es la clase de los conjuntos enumerables N_0. Otro cardinal transfinito notable es la clase de todas las clases que puede extraerse de N_0 por combinación de sus elementos, etc.

Sin embargo, el gran interés de esta realización del infinito, que trasciende así sin cesar las operaciones constructivas para alcanzar una sucesión de infinitos actuales encajados unos en los otros, es culminar de hecho en un debilitamiento del carácter específicamente numérico de la construcción y marcar un retorno parcial a los componentes lógicos del número. En efecto, los cardinales transfinitos ya no obedecen a la ley aritmética de iteración sino a las reglas de tautología y absorción: $N_0 + N_0 = N_0$ y $N_0 \times N_0 = N_0$. Ello se comprende de por sí, puesto que estos números ya no son a la vez cardinales y ordinales, como los números finitos, sino que la cardinación está disociada de la ordinación: el conjunto de todos los conjuntos enumerables es, en realidad, una clase lógica formada por "todas" las subclases numerables, o sea una clase cualitativa

surgida de una simple reunión lógica de las subclases que tienen la propiedad común de ser numerables. Por lo tanto, no se trata de un número engendrado por una ley de formación análoga a la que permite constituir, por ejemplo, la sucesion de los números enteros. En efecto, la correspondencia biunívoca que relaciona cada elemento individual de las subclases componentes con un elemento determinado de una de las otras subclases (por ejemplo, cada entero a su cuadrado, etc.) es una correspondencia "reflexiva", es decir que permite igualar el todo a la parte (por ejemplo, el conjunto de los números enteros al conjunto de sus cuadrados, los cuales sólo constituyen una parte del primer conjunto); ahora bien, esta correspondencia no culmina en una equivalencia aditiva entre el todo y la parte, sino en una equivalencia multiplicativa, comparable a la de las clases multiplicadas entre sí con el esquema lógico de un cuadro de doble entrada. Por ejemplo, sean las dos sucesiones:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10...
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100...

Resulta claro que, para un número finito n de elementos, la segunda sucesión no puede considerarse como una parte de la primera, ya que los cuadrados superan la sucesión de los enteros que les corresponden: así entre los diez primeros cuadrados, únicamente los tres más pequeños (1, 4 y 9) forman parte de los diez primeros números enteros, los otros cuadrados superan este conjunto (1 ... 10). Decir que el conjunto de los cuadrados es una parte del conjunto de los números enteros, implica entonces colocarse desde el punto de vista de lo infinito, ya que en lo finito, cuanto mayor sea el número más superará el cuadrado n^2 la sucesión 1 ... n. Entonces, en esta proposición de que el conjunto de los cuadrados es a la vez una parte (un subconjunto) del de los enteros y una parte equivalente al todo, el sentido de las palabras "equivalente" y "parte" debe precisarse del siguiente modo. En primer lugar, no se trata sino de una equivalencia análoga a la de los dos conjuntos finitos que presentan la misma cantidad de elementos, puesto que no puede intervenir la misma "cantidad" perteneciente a la sucesión 1 ... n: se trata de "todos" los enteros y de "todos" los cuadrados, es decir, de dos clases inagotables, enumerables pero nunca enumeradas: su equivalencia significa pues simplemente que estas dos clases se corresponden término a término porque sus elementos presentan la misma cualidad de ser "enumerables", es decir, de constituir dos series de forma 1 ... n (cada cuadrado es contado como una unidad); en segundo lugar, la relación de parte a todo entre la serie de los cuadrados y la de los números enteros significa que la serie de los cuadrados 1^2, 2^2 ... n^2 no es la única que goza de esta propiedad, y que muchas otras series también son enumerables en una forma 1 ... n. Sucede así que la serie de los enteros figura dos veces en el razonamiento, una vez como una de las series o subclases comparadas a las otras (a la de los cuadrados, a la de los números pares, etc., en resumen a todas las subclases enumerables), y la otra como expresión del carácter común al conjunto

de todas estas series, es decir, el carácter de la clase total de todas estas subclases. Tanto la equivalencia entre la parte y el todo como esa relación misma de parte y todo son pues de carácter multiplicativo (en el sentido de la multiplicación lógica) y, en consecuencia, son comparables a las correspondencias y particiones que intervienen en el esquema multiplicativo de los cuadros lógicos de doble entrada (por ejemplo, las clases formadas respectivamente por las piezas del esqueleto de los mamíferos corresponden término a término con las clases formadas respectivamente por las piezas del esqueleto de los rumiantes, etc., siendo esta correspondencia lógica a su vez "reflexiva" porque es multiplicativa).[42] En cuanto a los ordinales transfinitos, sólo son "tipos de orden", es decir, sistemas multiplicativos de relaciones asimétricas, así como los cardinales transfinitos son clases: de ahí que a un mismo cardinal transfinito corresponda una infinidad de ordinales, ya que pueden ordenarse de infinitas maneras los elementos de una misma clase infinita.

En resumen, los números transfinitos de Cantor disocian entre sí las dos estructuras fundamentales de la clase lógica y la relación asimétrica, que se fusionan en un solo todo en la construcción de los números enteros finitos. Por ello, si la serie de los ordinales finitos corresponde biunívocamente a la de los cardinales finitos, siendo todo número entero necesariamente cardinal y ordinal a la vez en el terreno de lo finito, esta correspondencia termina en el dominio de lo transfinito. Ahora bien, como esta disociación transfinita, entre los dos aspectos ordinal y cardinal del número entero, culmina en un retorno a los esquemas operatorios separados de la relación asimétrica y la clase lógica, constituye la mejor confirmación de la interpretación operatoria defendida en el punto 6 respecto de la génesis del número entero finito. En efecto, basta que se pase de la ley de formación de los números finitos que constituye la serie ilimitada 1 . . . n, a la consideración transfinita de su conjunto total, para que la clase así construida a través de "todos" estos números se disocie ipso facto de las relaciones asimétricas que han servido a su construcción sucesiva: la iteración de la unidad + 1 es pues, entonces, el producto combinado del encaje de las clases y la seriación de las relaciones asimétricas puesto que, si se separa uno de estos dos componentes del otro, los cardinales ya no se iteran más y dejan de corresponder biunívocamente a los ordinales.

12. Conclusión: el problema epistemológico del número. Desde las acciones más elementales que permiten al niño o al primitivo enumerar las pequeñas colecciones hasta las generalizaciones negativas, complejas y transfinitas del número, que parecen no presentar relación alguna con estas acciones concretas, se encuentra de hecho un mismo mecanismo operatorio que se desarrolla en función de su lógica interna del modo más continuo y mejor equilibrado, a pesar de su apariencia a menudo irregular resultante de las dificultades de la toma de conciencia.

[42] Véase nuestro *Traité de logique*, punto 21.

Porque, desde las acciones iniciales, la relación entre el sujeto y los objetos es un testimonio de un fenómeno mucho más complicado de lo que dejan suponer las interpretaciones empiristas, aprioristas o convencionalistas corrientes. Por lo tanto, volvamos a partir de la fuente para vincularla enseguida con las orientaciones observables en el equilibrio móvil final.

La acción de enumerar no puede estar determinada únicamente por los objetos, puesto que ella los estructura en función de un esquema operatorio, que es asimilación de las cosas al doble acto de reunir y ordenar, y puesto que asimilar significa agregar a los objetos caracteres nuevos que no estaban incluidos anteriormente a la acción del sujeto: así, la reunión elemental $1 + 1 = 2$ añade a cada uno de los objetos contados como unidades 1, 1, la nueva propiedad de constituir un todo 2. Sin embargo, ¿estas acciones surgen únicamente del sujeto o presuponen una acomodación a los objetos y, en este caso, qué tipo de acomodación? Para resolver este problema epistemológico de las relaciones entre la construcción asimiladora y la experiencia posible conviene llevar a cabo al mismo tiempo el análisis psicológico de las raíces y el examen del desenvolvimiento histórico de las generalizaciones del número.

Desde el punto de vista psicológico, deben distinguirse dos cuestiones muy diferentes, demasiado a menudo confundidas: la de saber si la experiencia es necesaria para que se organicen las acciones u operaciones de clases, de seriar y numerar, y la de determinar cuál es el papel del objeto en esta eventual experiencia.

Cabe pensar que concuerda con todos los datos conocidos el hecho de que la experiencia sea indispensable al niño (y al primitivo) para descubrir las relaciones aritméticas elementales. El hecho de que $2 + 2$ dé siempre 4 (y nunca 3 ó 5) no resulta de por sí evidente para un niño, independientemente de toda definición nominal y convencional, antes de que haya comprendido que $4 - 2 = 2$ y que $4/2 = 2$, es decir, antes de que sus acciones se hayan organizado en operaciones reversibles. El descubrimiento empírico de que 10 pedregullos contados en cierto orden dan también 10 cuando se los cuenta en un orden diferente, le causó, cuando era niño, gran sorpresa a uno de nuestros amigos matemáticos, bien conocido por sus trabajos epistemológicos, quien incluso hace remontar a esta precoz experiencia su interés por el número. Ahora bien, esta verdad de la similitud entre los diversos órdenes posibles en la numeración de los elementos de una colección sólo se vuelve deductiva en función de la reversibilidad (reversibilidad de la seriación lógica o de la ordenación misma). Por lo tanto, existe una fase intuitiva y preoperatoria del pensamiento, durante la cual es necesaria la experiencia para el descubrimiento y la verificación de las verdades aritméticas, y una fase operatoria a partir de la cual la deducción comienza a bastarse a sí misma.

Sin embargo, el hecho de que la experiencia sea psicológicamente indispensable para la construcción del número, no prueba en absoluto que se extraiga el número a partir de los objetos, en la forma que sea, ya que una cosa es actuar empíricamente y otra abstraer una relación a partir de

los objetos: la relación establecida entre los objetos puede haber sido agregada por la acción, aun cuando ésta se inaugure con una etapa de tanteo experimental. En otros términos, un sujeto que actúa de modo empírico puede utilizar los objetos como simples soportes, u ocasiones, para la acción, pero en realidad experimentar consigo mismo, es decir, con la coordinación de sus propias acciones más que con los objetos sobre los que ellas se apoyan.

Ahora bien, ¿cuál es el papel de los objetos A, B, C... J, cuando el sujeto, después de haber enumerado A, B ... J = 10, descubre que en otro orden, como J, I, H, G ... A, la sucesión sigue siendo igual a 10? En primer lugar, es evidente que este papel es muy diferente si se trata de seriar diez colores o diez pesos, ya que, en este caso, las cualidades mismas de los objetos son las que intervienen en la seriación. En cambio, en la simple enumeración, el objeto es absolutamente cualquiera, porque sus cualidades particulares no entran en juego ya que sólo entra en cuestión el orden mismo de la enumeración. Es cierto que cuando se trata de sólidos discretos, la enumeración resulta más fácil, pero también pueden concebirse diez elementos recortados en un sólido continuo, o incluso en un líquido o un gas: en este caso la localización es más difícil y la experiencia sólo culminará mucho más tardíamente, pero la acción de enumerar seguirá siendo posible, al menos en el interior de algunos campos perceptuales momentáneos. En resumen, en este tipo de experiencia, el objeto sólo desempeña el papel de soporte de la acción. Propiamente hablando sólo es un indicador: podría realizarse la experiencia con números, es decir, con puros signos o símbolos de objetos; sin embargo se realiza con objetos reales, pero que para el sujeto sólo tienen el valor de índices perceptuales de sus propias acciones de contar y no son elementos del número.

Aunque experimental en su fuente intuitiva, el número se añade a los objetos y en absoluto es extraído a partir de ellos. Se encuentra en su totalidad en el esquema de asimilación operatoria. No por ello deja de ser menos real la acomodación, pero no es específica respecto de las cualidades distintivas de los objetos considerados: equivale simplemente —para toda colección de objetos discretos y objetos cualesquiera separados artificialmente (en acto o en pensamiento)— a que la acción empírica y la operación reversible desembocarán en combinaciones adecuadas a los objetos. Así, en el ejemplo analizado, diez objetos contados en cierto orden seguirán siendo diez en un orden diferente, ya que los objetos en tanto tales no invalidan la coordinación de las acciones. Por lo tanto, hay equilibrio permanente entre la asimilación de los objetos al esquema operatorio y la acomodación de este esquema a objetos cualesquiera, pero no hay nada, en la estructura definitiva del esquema considerado, que haya sido "abstraído" del objeto; en efecto, para poder abstraer el número de las colecciones de objetos sería necesario poder clasificarlos y ordenarlos, que son acciones del sujeto ejercidas sobre estas colecciones: ahora bien, el esquema del número se reduce precisamente a estas solas acciones de clasificar y ordenar, simplemente agrupadas de manera diferente.

En cuanto a la "experiencia interior" hemos visto (punto 2) que tampoco puede obtenerse el número a partir de ella, del mismo modo que Maine de Biran creía poder extraer una causalidad totalmente dada a partir de la lectura de los estados de conciencia relacionados con la propia acción. Ni la seriación, ni la clasificación, ni el número están dados sin más en la conciencia interna: son la resultante de la coordinación de las acciones sucesivas, es decir, de su agrupamiento, y estos agrupamientos se aplican tanto a los datos de la experiencia interna como a los de la experiencia externa, y no son más la resultante de las primeras que de las segundas, puesto que se trata de acciones que se ejercen sobre ellas y no de intuiciones primeras. En resumen, si se reemplaza la coordinación de las acciones por la de los pensamientos, esta coordinación sigue siendo una actividad y lo que importa no es su repercusión sobre la conciencia: es el carácter activo de esta coordinación, condición previa de toda experiencia y fuente de transformaciones que enriquecen tanto los objetos de la experiencia interna como los de la realidad externa.

Este carácter particular de las acciones y operaciones que intervienen en la matemática (en primer lugar, empíricas, y luego deductivas, pero en ambos casos independientes de los objetos), explica el hecho de que estos actos y sus composiciones pueden repetirse y generalizarse indefinidamente. Ya psicológicamente comprobamos que, apenas superado el nivel de las operaciones concretas y desde el momento en que los mecanismos formales prolongan la acción posible, la serie de los números accesibles al niño de 11-12 años desborda toda percepción e incluso toda representación particulares y se compromete en la dirección de la pura construcción. Por ejemplo, decir que "nunca se llegará al final de los números", según la expresión de uno de nuestros sujetos de 11 años, es descubrir el poder infinito de iteración de la operación + 1, comparado con un esquema finito y que puede representarse como el de un número dado, susceptible de reunir efectivamente los términos de una colección concreta de objetos. Dicho de otro modo, el número consiste exclusivamente en un sistema de acciones u operaciones que se ejercen sobre los objetos, pero que no dependen de las propiedades particulares de estos objetos y la construcción del número puede proseguir indefinidamente más allá de los límites de la percepción e incluso más allá de la representación imaginada de las colecciones formadas por estos objetos, es decir, mucho más allá de las fronteras del objeto. El empleo de las diversas formas de infinito, indispensables para el teórico del número como para el analista y el geómetra, no es sino el testimonio cotidiano de esta liberación de los seres numéricos respecto del objeto, puesto que el objeto de experiencia es necesariamente finito.

En cuanto a las generalizaciones del número en la dirección de lo negativo, lo imaginario, etc., hemos visto hasta qué punto es más paradójico aún su carácter psicológico de operaciones realizadas con los objetos con una precisión cada vez mejor diferenciada, pero sin que se pueda concebir de qué modo se los hubiera podido extraer a partir de ellos. Ahora bien, las soluciones habituales de la cuestión de su adecuación a la realidad

física difícilmente expliquen este doble carácter. Las soluciones aprioristas, según las cuales el numero es una estructura de origen interno al espíritu (o un lenguaje convencional por él elaborado) e impuesta a la realidad externa, no explican por qué el número converge con esta realidad. En cuanto a las soluciones empíricas que pretenden, a pesar de todo, extraer directamente el número a partir de la experiencia, no explican su fecundidad y tampoco su necesidad. Por el contrario, afirmar que el número deriva de las operaciones o de las acciones ejercidas por el sujeto sobre los objetos sin por ello provenir de estos objetos, permite concebir los diferentes tipos de número como el resultado de coordinaciones progresivas y se evita pensar que el número está dado de entrada enteramente en el espíritu o las cosas. Aunque la fuente de las coordinaciones deba buscarse en la actividad del sujeto, las diversas formas de número no se encuentran ya preformadas en el sujeto, sino que constituyen los estados finales y necesarios del equilibrio de coordinaciones que se inician desde la organización de los esquemas sensoriomotores y perceptuales. Ahora bien, más allá del funcionamiento de estos esquemas psicológicos iniciales, estas coordinaciones se remontan hasta las coordinaciones biológicas elementales. En este caso, la adecuación del número a lo real no puede explicarse por la presión exterior que la realidad ejercería sobre un espíritu acabado, ni por una preformación interna de este espíritu considerada en "acto" o en "potencia", sino precisamente por el hecho de que los mecanismos constructivos que presiden el desarrollo del espíritu hunden sus raíces en la organización vital y, en consecuencia, en la realidad física. Por lo tanto, sólo por intermedio del organismo y sus mecanismos íntimos, y no por la influencia de presiones directas del medio externo, se comprende la adecuación de las operaciones lógico-aritméticas a las cosas. Dicho de otro modo, hay que buscar en las coordinaciones psicobiológicas que hacen posible la acción —en oposición a lo que los filósofos consideran como estructuras a priori del pensamiento— el secreto de la unión entre las construcciones intelectuales fundamentales (agrupamientos lógicos y agrupamientos aritméticos) y lo real, y no en la experiencia externa —ni siquiera en la interna— actual.[43]

Las dos dificultades principales de esta solución consisten en explicar cómo la construcción gradual resultante de la actividad del sujeto desemboca en organizaciones finales necesarias sin que estén preformadas en el

[43] Observemos de entrada que esta solución no tiene nada de "realista", ni sobre todo de materialista, en el sentido dogmático del término, ya que, al mismo tiempo que la psicología se esfuerza por reducir el número a las coordinaciones de la inteligencia y la biología intenta reducir estas coordinaciones a las coordinaciones orgánicas y la organización vital misma a las leyes físico-químicas, la matemática vuelve a traer las realidades físicas dentro de los marcos del espíritu. Por lo tanto, siempre hay un círculo entre el sujeto y el objeto; pero, en el caso de la matemática, este círculo, en vez de abarcar solamente la experiencia externa, se dilata hasta abarcar el círculo de las ciencias en su conjunto. Este circulo de las ciencias es el objeto de estudio de esta obra en su totalidad, y no corresponde que se lo desarrolle aquí. Sólo convenía observar que la unión del espíritu y lo real asegurada por el intermedio de las coordinaciones psicobiológicas sólo describe la mitad de este círculo y la otra mitad del camino consiste en vincular inversamente lo real con el espíritu por intermedio de la física y la matemática.

espíritu o el organismo, y cómo esta misma construcción se diferencia en estructuras múltiples, de algún modo preadaptadas al objeto, al mismo tiempo que provienen de coordinaciones iniciales muy simples y poco numerosas. En este sentido no puede romperse la solidaridad entre las formas superiores del número y sus formas elementales. Kronecker atribuía a Dios la creación de los enteros positivos y todo lo demás a la fabricación humana. El lenguaje tradicional expresa lo mismo cuando llama números "naturales" a la sucesión de los enteros positivos como si los otros números fuesen artificiales. En realidad, no existe oposición alguna entre los procedimientos operatorios que generan el número entero y las operaciones generalizadas que generan las estructuras numéricas ulteriores. Por el contrario, únicamente estas formas generalizadas del número son las que hacen explícitas las particularidades mentales que permanecen en forma implícita en la construcción de los números iniciales: tanto los números iniciales como los números superiores derivan de un solo y mismo mecanismo operatorio, cuyas manifestaciones sucesivas no son sino las fases de una gradual coordinación. Surgen entonces los dos problemas que acabamos de mencionar: ¿por qué culmina esta coordinación en estructuras necesarias? y ¿cómo explicar su fecundidad, si sus raíces sólo se hunden en las coordinaciones psicobiológicas elementales? Dicho también en otros términos, ¿cómo conciliar la necesidad final de las construcciones numéricas con la ausencia de preformación, y su multiplicidad a la vez creadora y preadaptativa con la pobreza de sus fuentes?

El problema de la necesidad final de las estructuras numéricas es el más simple de resolver. A la necesidad dada de antemano en forma de estructuras a priori, el punto de vista genético permite, en efecto, oponer la necesidad terminal característica de los estados de equilibrio operatorio móvil y reversible, hacia los que tiende el desarrollo de las acciones consideradas, y sin que por ello intervenga desde el comienzo la forma de este equilibrio. En este sentido, la interpretación por la cual el número entero es el producto de una fusión entre las operaciones que utiliza la lógica cualitativa en estado de agrupamientos aislados (encajes de las clases y seriación de las relaciones asimétricas) permite concebir a la vez el carácter de necesidad racional, revestido por la síntesis final, y la continuidad que une esta síntesis terminal con las coordinaciones más elementales y menos formales. En efecto, por una parte, los agrupamientos lógicos no son sino el resultado interiorizado y equilibrado de las coordinaciones entre acciones; coordinaciones, que, desde sus formas más humildes, muestran ya la presencia de relaciones entre movimientos sucesivos, retornos y rodeos que conducirán a la composición, la reversibilidad y la asociatividad operatorias. Por lo tanto, la lógica está contenida en germen desde los esquemas de la actividad sensoriomotriz y perceptual al mismo tiempo que sólo constituye la forma final de equilibrio de estas coordinaciones presentes desde el comienzo.[44] Por otra parte, desde las formas más básicas de la

[44] Véase nuestra obra acerca de *La psychologie de l'intelligence*. Colin, 1946. [Hay versión castellana: *Psicología de la inteligencia*. Buenos Aires, Siglo Veinte, 1966.]

actividad mental, se observa una especie de enumeración intuitiva y perceptual que anuncia ya las coordinaciones ulteriores entre la clasificación y la seriación y que ya es el resultado de coordinaciones elementales entre simples esquemas clasificatorios y de ordenación de carácter motor. Así, Otto Köhler pudo demostrar la discriminación de conjuntos de 2 a 6 objetos en los pájaros y también pudo entrenar algunas gallinas para que picotearan el segundo grano de una fila de diez elementos. Estos números intuitivos o figurales son los que están presentes en el niño pequeño anteriormente a la construcción de la sucesión operatoria de los enteros. En consecuencia y nuevamente aquí, resulta fácil explicar el pasaje de las coordinaciones elementales no racionales a las formas necesarias finales, por un proceso de progresivo equilibrio, que localiza la necesidad al final del proceso sin que sea necesario recurrir a una preformación estructural: la articulación progresiva de las configuraciones activas e intuitivas y la reversibilidad que de ella resulta son suficientes, al fin de cuentas, para esta explicación sin la intervención de algún a priori.

En cuanto a la fecundidad creciente del concepto de número, comparado con la pobreza de sus fuentes, el carácter sorprendente de esta evolución radica en que, al proceder de las acciones de reunir y ordenar simultáneamente que el sujeto ejerce directamente sobre los objetos, el número se orienta a la vez en dos direcciones divergentes y complementarias: por una parte, se aleja cada vez más de la acción experimental del sujeto para comprometerse en composiciones operatorias sin relación alguna con esta acción inmediata (lo infinito, lo imaginario, etc.): pero, por otra parte, sólo se aleja de la apariencia empírica de los objetos para mejor alcanzar, al fin de cuentas, el mecanismo de sus transformaciones íntimas (por ejemplo, la aplicación del infinito al cálculo de las variaciones continuas o del imaginario al cálculo de los vectores).

Ahora bien, esta doble evolución, por una parte por interiorización de las acciones del sujeto y por la otra por penetración dentro de las modificaciones posibles del objeto, no se produjo de modo regular, ni en uno de estos dos aspectos ni en el otro. En lo que se refiere a la interiorización de las operaciones, únicamente a través de una deducción simple y rectilínea se realizaron los progresos en la construcción y la teoría de los números: frecuentemente a través de descubrimientos fortuitos y oscilantes, como si hubiera un sistema de leyes objetivas que poco a poco se impusiera al espíritu, pero descubiertas desde adentro y no como realidades externas. Muchos misterios escapan aún, por otra parte, a esta investigación a la vez oscilante y constructiva, como por ejemplo la ley de sucesión de los primeros números. En cuanto a la adaptación del número al objeto, hemos visto hasta qué punto se asemeja poco a una sumisión gradual del espíritu a la experiencia física, sino que, por el contrario, se trata constantemente del encuentro a posteriori entre esquemas preparados previamente durante mucho tiempo y las situaciones que permiten su imprevista utilización. Por lo tanto, si la construcción del número marca una doble liberación, respecto de la acción directa del sujeto y respecto de las estructuras inmediatas de los objetos, y un doble desarrollo en la

dirección de las coordinaciones internas de uno y las transformaciones íntimas de los otros, esta doble evolución se presenta a la vez como oscilante, en el primer caso, y anticipadora en el segundo; es decir que, en ambos casos, el sujeto toma poco a poco conciencia de un elemento, ya sea de coordinación propia o bien de convergencia con lo real, que supera su actividad constructiva actual y la condiciona.

En otros términos, esta doble liberación se realiza tanto en provecho de un sujeto universalizado como de un objeto generalizado: el milagro del número reside, en efecto, en el hecho de que al alejarse cada vez más de la acción elemental que lo engendra, no por ello penetra en el mundo de las quimeras como ha sucedido con todos los conceptos físicos que fueron más allá de su contexto inicial de acción experimental y se generalizaron sin restricción, sino que concuerda cada vez más con las operaciones del espíritu a medida que se desarrolla y se adapta cada vez mejor al universo a través de sus aparentes modificaciones. Ahora bien, el interés epistemológico excepcional de esta concordancia interna y esta adecuación externa radica en el hecho de que, no obstante, parece ser que ambas proceden integralmente, a pesar de los choques y obstáculos de su desarrollo psicológico e histórico, de una interacción presente en su totalidad en la acción elemental del sujeto ejercida sobre los objetos.

Entonces, ¿cómo explicar que simples acciones —como las acciones de seriar y clasificar— puedan desembocar a la vez en este prodigio de construcción coherente y adecuación precisa sin atribuirles de antemano —a través de un preformismo análogo al de la embriología respecto de los óvulos y de los espermatozoides— todo aquello que el desarrollo ulterior del mundo pone poco a poco de manifiesto, o sin atribuir este desarrollo a factores externos con respecto a estas acciones iniciales?

La clave del misterio nos parece residir, en primer lugar, en el hecho de que el número no procede de acciones particulares, es decir, de un tipo especial de acciones entre otras, sino que expresa —en una forma a la vez mentalizada (es decir interiorizada) y que ha alcanzado el estado de equilibrio móvil— la coordinación misma de las acciones. Reunir y ordenar no son, en efecto, acciones particulares que puedan compararse con las acciones de pesar, empujar, levantar, etc.; son acciones que se coordinan entre sí porque traducen desde el comienzo una exigencia de coordinación, es decir, porque son las resultantes de la coordinación de todas las restantes acciones. Que estas coordinaciones necesiten al comienzo de los objetos para ejercerse y aplicarse, no presupone en absoluto que su estructura provenga del objeto como tal: por el contrario, construyen estas estructuras a medida que se desarrolla su funcionamiento, empezando por los ritmos orgánicos y psicobiológicos, continuando por las regulaciones perceptuales y luego intuitivas y terminando por las operaciones lógico-aritméticas: término concreto final de este proceso de equilibrio (y punto de partida de las posteriores formalizaciones), pero que culmina en un proceso de coordinación que se ha iniciado con la organización y la asimilación psicobiológica. Por lo tanto, el número, junto con las operaciones lógicas que supone y cuya síntesis realiza, es la forma

más esencial y más central de la asimilación intelectual, en tanto ella prolonga, por intermedio de las formas intuitivas y sensoriomotrices, la asimilación psicobiológica. De ahí surge su posibilidad de liberación respecto de la acción directa y lo real inmediato, sin por ello afectar la permanencia de su adecuación con todas las operaciones del espíritu ni con todas las transformaciones de lo real. Porque la acomodación específica de esta forma general de asimilación sólo puede ser una acomodación a la vez anticipadora, en tanto resultante de las cualidades diferenciadas de los objetos, y permanente una vez realizada, puesto que las coordinaciones de las acciones siempre concordarán con lo real si estas coordinaciones no expresan el resultado de experiencias particulares, sino la posibilidad misma de la experiencia, es decir de la acción sobre un objeto cualquiera. La construcción del número marca así, en suma, el prototipo de esta asimilación de lo real al espíritu que realizan todas las clases de matemática y que consiste en insertar las transformaciones de lo real en las coordinaciones de las acciones, efectivas o posibles, del sujeto que actúa sobre esta realidad.

En segundo lugar, si las operaciones lógico-aritméticas son el resultado de la coordinación de las acciones, y no de su detalle especializado, la creciente multiplicidad de las estructuras numéricas, concebidas como estructuras mentales tardías y no a priori, corresponde entonces a un modo de construcción, para el cual la explicación genética cuenta con una tercera posición —tan alejada del preformismo como del recurso a los factores empíricos—: la coordinación de las acciones no contiene de antemano a la lógica y tampoco al número, pero como las operaciones lógico-aritméticas son el producto de abstracciones a partir de la acción y no del objeto, esta coordinación proporciona los elementos de estas posibles diferenciaciones. En efecto, la abstracción y la generalización en relación con las acciones son, lo hemos visto (punto 2), a la vez construidas y reflexivas, en oposición a la abstracción y la generalización en relación con los objetos. En otros términos, si abstraemos y generalizamos caracteres del objeto, sólo obtenemos, al fin de cuentas, lo que al comienzo se ha tomado, salvo que se añadan caracteres operatorios provenientes de la actividad del sujeto. Si el número y la lógica sólo fueran esquematizaciones del objeto, no se comprendería entonces cómo lo superan tan libremente como lo hacen los esquemas lógico-aritméticos. Por el contrario, una vez admitida esta especie de a priori funcional (funcional y no estructural, es decir que no contiene estructura a priori alguna) que es la coordinación de las acciones del sujeto (por otra parte suprimir esta coordinación equivaldría a convertir al organismo en una tabla rasa respecto de las acciones del medio, lo cual contradice todo lo que nos ha enseñado la biología), las operaciones lógicas y numéricas se construyen a la vez por abstracción a partir de la organización sensoriomotriz y por composiciones generalizadoras de los caracteres así abstraídos, composiciones cada vez más dinámicas y reversibles porque cada vez mejor equilibradas.

En efecto, los esquemas sensoriomotores provenientes de la repetición activa de las conductas y que constituyen, en el terreno de la percepción y el hábito motor, la más simple asimilación mental de lo real por parte

del sujeto, provienen a su vez de una primera abstracción a partir de los ciclos reflejos y orgánicos, que consiste en extraer de ellos su capacidad de repetición y extensión generalizadora. Los esquemas sensoriomotores culminan, por su parte, en una especie de lógica de la acción, cuya coherencia particular consiste por ejemplo en no cumplir, al mismo tiempo que él, un acto contrario a la meta perseguida por otro, y en aplicar el mismo esquema de acción a circunstancias análogas aunque nuevas, a ordenar los medios y los fines, etc. Ahora bien, la construcción de esta lógica sensoriomotriz se apoya en las coordinaciones precedentes por la abstracción de su poder de establecimiento de sucesión o clasificación prácticas (discriminaciones de reconocimiento y generalizaciones por transferencia). El pensamiento intuitivo toma luego de los esquemas sensoriomotores, a través de nuevas abstracciones, su poder de asimilar lo real con el doble mecanismo de la sucesión y la clasificación, pero traduciéndolos en forma de representaciones, es decir, acciones interiorizadas susceptibles de anticipaciones y reconstituciones más profundas y mejor articuladas. Las operaciones concretas abstraen del pensamiento intuitivo estas articulaciones, pero las generalizan en forma móvil y reversible. Por último, las operaciones formales abstraen estas operaciones de su contexto limitado para traducirlas en proposiciones independientes de toda acción concreta. Así, las operaciones lógicas y numéricas se construyen por etapas, y al mismo tiempo, se sustentan en todos los niveles en los elementos abstraídos de las coordinaciones del nivel anterior. De este modo, las estructuras lógico-aritméticas hunden sus raíces en las coordinaciones más elementales sin por ello estar preformadas y se elaboran en un doble proceso de abstracción reflexiva (diferenciaciones) y generalizaciones que consisten en nuevas composiciones que integran los elementos de las estructuras precedentes.

En tercer lugar, lo propio de esta estructuración por etapas —con diferenciaciones e integraciones correlativas en cada una de ellas— es constituir, no sólo un enriquecimiento y una mayor agilidad gradual de las formas sucesivas de coordinación, sino además, y hasta cierto punto, una repetición ampliada de los mismos procesos formadores de una etapa a la otra, con desajustes en el tiempo. En efecto, en la etapa sensoriomotriz se ven perfilarse —pero como estados esquemáticos poco diferenciados— las mismas formas de organización que más tarde se desplegarán extensamente en la etapa operatoria. Así, los esquemas sensoriomotores son el equivalente funcional de las clases (aplicación de un mismo esquema a múltiples situaciones), las relaciones (relaciones de diferencias o semejanzas utilizadas en la acción) e incluso de cierta cuantificación prenumérica por la acción combinada de la semejanza y el orden (repeticiones acumulativas, por ejemplo con la imitación diversa según se trate de reproducir 1-2 veces ó 4-5 veces el mismo movimiento). Al descender de la etapa sensoriomotriz a la etapa instintiva vuelven a encontrarse, en formas aun más elementales y rígidas, procesos análogos, y así seguido, en una continuidad funcional completa entre lo orgánico y lo mental.

Por ello, el número —producto de la coordinación de acciones y no de acciones particulares— produce abstracciones reflexivas sobre las que

se apoyan las composiciones en cada nueva etapa sin discontinuidad funcional con las más lejanas y se relaciona a la vez con las actividades más fundamentales del sujeto, sin estar por ello contenido de antemano en las coordinaciones del punto de partida y constantemente relacionado con lo real a través de estas coordinaciones, sin por ello ser resultante de una abstracción de los objetos como tales.

LA CONSTRUCCION OPERATORIA DEL ESPACIO

Durante estos últimos años, cuanto más profundo fue el análisis matemático de las relaciones entre el número y el espacio, más se hizo evidente el paralelismo existente entre estas dos clases de realidades. Esta convergencia resulta tanto más sorprendente en la medida en que durante mucho tiempo estuvo de modo considerar el número como representativo de la matemática pura, porque es exclusivamente intelectual, y el espacio como el primer dominio correspondiente a la matemática aplicada, porque es de carácter sensible o perceptual. Esta oposición ha desaparecido totalmente, pero los motivos de su eliminación son particularmente instructivos para la epistemología genética.

Con los trabajos de Weierstrass, G. Cantor y Dedekind, ya se había puesto de manifiesto una posible traducción entre el continuo geométrico y lo que se ha llamado el continuo analítico o conjunto de los números reales (racionales e irracionales). La "potencia del continuo" es, en el lenguaje de la teoría de los conjuntos, la característica numérica equivalente a las propiedades del continuo espacial. Por ejemplo, Cantor determina por una misma construcción de series convergentes los puntos de acumulación que componen el continuo geométrico (se concibe cada uno de estos puntos como el límite de una serie de intervalos encajados) y los números irracionales que llenan los blancos presentes entre los números racionales.

Por otra parte, los progresos de la topología se orientaron en muchos puntos hacia el encuentro con el número. Así, el estudio topológico de los poliedros culmina en una topología combinatoria y algebraica que casi ya no difiere de un álgebra pura; algunos grupos discretos y conmutativos —desarrollados recientemente por Pontrjagin— realizan una síntesis tan estrecha entre lo topológico y lo algebraico que sus elementos pueden analizarse como materia de cálculo algebraico o como puntos vinculados por un principio de vecindad. Por su parte, la teoría de los espacios abstractos permite hablar en lenguaje espacial de conjuntos cualesquiera a condición de determinar una ley de vecindad, pero ella puede alejarse mucho de las concepciones ordinarias vinculadas con este vocablo: por

ejemplo "el espacio de los números racionales",[1] etc. Recíprocamente, la teoría de los conjuntos habla de conjuntos abiertos y conjuntos cerrados, de fronteras, de exterioridad o interioridad, etc., en sentidos indiferentemente geométricos o abstractos. Finalmente, por una elección convencional se decide, en algunas regiones limítrofes, si se adoptará el punto de vista de la vecindad espacial o el lenguaje analítico de los conjuntos o los números.

Así, un joven matemático —B. Eckmann— consideró recientemente el dualismo del número y el espacio como el ejemplo, no de una dualidad estática que opone dos propiedades cualitativamente distintas, sino como una dualidad "complementaria" en el sentido de la microfísica, es decir, precisamente como dualidad de puntos de vista respecto de dos aspectos igualmente necesarios de la misma realidad.[2]

Ahora bien, desde el punto de vista psicológico se podría pensar a primera vista en una oposición esencial entre el espacio fundado en las percepciones y la motricidad más elementales y el número, producto de operaciones tardías y rápidamente formalizables. Este contraste aparente resulta incluso tan engañador que, por ejemplo, Kant pensaba el espacio y el tiempo como formas a priori de la sensibilidad, mientras que reservaba para el número el papel de esquema de unión entre el tiempo y el entendimiento.

Sin embargo, confirmando lo que acabamos de entrever de las operaciones lógico-aritméticas, que hunden sus raíces en las coordinaciones más primitivas de la acción, vamos a comprobar que la construcción genética del espacio es, en realidad, exactamente paralela a la del número, en los diferentes planos, perceptual, sensoriomotor, intuitivo y operatorio, con la única diferencia de que el esquematismo lógico-aritmético procede de la acción con elementos discontinuos de lo real y el esquematismo espacial de la acción con elementos continuos (ambos esquematismos se reúnen luego de modo cada vez más estrecho). En efecto, si se tiene el cuidado de estudiar la percepción en el niño y no sólo en el adulto (donde padece por reacción toda clase de influencias provenientes de la inteligencia operatoria), se observa que los mecanismos perceptuales tampoco consiguen construir, de por sí, un espacio coherente, como tampoco culminan en la construcción de las clases, las relaciones lógicas y los números. Y si seguimos de cerca la construcción del espacio en el pensamiento intuitivo y en el plano de las operaciones concretas anteriormente al desarrollo del pensamiento formal, observamos que esta construcción corresponde paso a paso a la de las operaciones lógico-aritméticas, con la única diferencia de que se trata de operaciones infralógicas que se refieren a la elaboración del objeto, o de los objetos de diversos órdenes, y no de operaciones lógicas o numéricas referidas a los diversos modos de reunión de objetos discontinuos (en clases, relaciones seriadas o números).

[1] Véase Kuratowski: *Topologie*.

[2] B. Eckmann: *Topololgie und algebra*. Vierteljahrschrift d. Naturf., ges., Zurich, 1944, pág. 26.

Los datos de la construcción genética convergen pues, en vez de divergir, con los resultados de la construcción teórica y la correspondencia es hasta tal punto exacta que —contrariamente a las opiniones corrientes acerca de la estructura métrica euclidiana del espacio original— las relaciones topológicas son las primeras en organizarse, de donde surge el paralelismo entre los encajes espaciales (así como las relaciones de orden o emplazamiento) y las clasificaciones (así como las seriaciones) lógicas.

1. Clasificación de las interpretaciones epistemológicas del espacio. La construcción del espacio es solidaria, no sólo de todo el desarrollo mental de cada una de estas etapas, sino además de toda la evolución biológica hasta, e incluidos, los procesos elementales de la morfogénesis vital. En el extremo superior de este desarrollo, el espacio se genera por las operaciones deductivas de la geometría. Pero estas operaciones formalizadas están precedidas por operaciones concretas que hunden sus raíces en intuiciones diversamente articuladas. Estas intuiciones proceden de un espacio sensoriomotor y perceptual que se sustenta en un espacio postural y reflejo, "actuado" antes de ser percibido o concebido. Sin embargo, todo instinto animal supone ya una geometría (véanse las figuras regulares de las células de una colmena o de una tela de araña), y toda la morfogénesis (que en parte prolonga el instinto) es una creación continua de "formas" elaboradas en conexión con el medio. Por lo tanto, es evidente que surgen los mismos problemas epistemológicos a propósito de cada una de estas etapas, y además con la misma posible diversidad de soluciones. Existen en particular tantas diferencias entre las diversas interpretaciones de la percepción espacial —por lo tanto entre las epistemologías que consideran el espacio como una "forma de la sensibilidad"— como entre las múltiples teorías acerca de la deducción geométrica, abordada como actividad del intelecto.

La historia misma de las explicaciones del espacio resulta de por sí extremadamente significativa desde este punto de vista. En efecto, puede decirse que la interpretación de la geometría moderna ha evolucionado, en grandes rasgos, desde una concepción que pone todo el acento en la propiedad perceptual o "sensible" del espacio, hasta una concepción que reduce la geometría a una especie de lógica: ahora bien, en cada uno de estos extremos vuelven a encontrarse las mismas oscilaciones entre las formas innatas y las formas empiristas, y el mismo esfuerzo por escapar a estas dos exageraciones contrarias y encontrar relaciones de interdependencia entre el sujeto y el objeto.

Descartes, al apoyarse en su descubrimiento de la geometría analítica, admite una suerte de paralelismo entre el álgebra y la geometría, tal que, a las figuras constituidas por las curvas corresponden las ecuaciones del cálculo algebraico y recíprocamente; pero este paralelismo que se sustenta en el dualismo metafísico entre la extensión y el pensamiento no conduce, en su sistema, a una unidad real de la construcción operatoria y la intuición espacial. Con Kant, se acentúa el dualismo entre el espacio concebido (como el tiempo) como forma a priori de la "sensibilidad"

y el entendimiento lógico, apareciendo entre ellos el esquematismo del número que, por otra parte, se basa en el desenvolvimiento temporal y no en la extensión. Durante casi todo el siglo XIX, la interpretación del espacio se centraliza en el contacto perceptual entre el sujeto y el objeto físico, y oscila entre, por una parte, el "innatismo" o apriorismo y, por la otra, diversas formas de "empirismo" o genetismo; pero siempre está presente como un trasfondo la idea de una oposición entre el carácter sensible o intuitivo de la extensión y el aspecto lógico o combinatorio del análisis y el álgebra. En cambio, también durante el siglo XIX, se preparaba ya la crisis de la geometría de donde surgieron, en el período contemporáneo, las interpretaciones del espacio que tienden a desprenderlo de la intuición perceptual o en imágenes, para concebirlo en función de una construcción deductiva que ya no se aplica simplemente a posteriori a formas dadas previamente por la sensibilidad, sino que realmente las genera (en todas sus partes o gracias a una generalización que interviene apenas se produce el contacto sensoriomotor con el objeto físico).

Como todos sabemos, esta crisis fue el resultado de la gradual elaboración de las geometrías no euclidianas, que pusieron de manifiesto la existencia de una pluralidad de modelos, entre los cuales sólo uno corresponde directamente a nuestra manera de percibir el espacio próximo y práctico. Y la realización acabada de las controversias nacidas a partir de este descubrimiento fundamental estuvo marcada por dos acontecimientos decisivos que liberaron la interpretación del espacio de la intuición sensible: la teoría de la relatividad y el empleo del método axiomático. En efecto, por una parte, la mecánica einsteiniana mostró que el espacio del mundo físico deja de ser euclidiano a cierta escala y cuando se han superado ciertas velocidades, prueba que el espacio de nuestra percepción se relaciona con condiciones limitativas que eliminan su valor de marco a priori o expresión adecuada del objeto en general. Por otra parte, la libre construcción deductiva de un conjunto indefinido de modelos espaciales probó simétricamente que el espacio intuitivo resulta también inadecuado para agotar la actividad operatoria espacializante del sujeto y los caracteres del objeto espacializado.

Si queremos clasificar las diferentes posibles interpretaciones del espacio, nos encontramos en primer lugar ante una heterogeneidad de planos, según se ponga todo el acento en la explicación del espacio perceptual o en la del espacio construido deductivamente. Desgraciadamente el papel que se atribuye a la intuición sensible o a la deducción también varían, de modo considerable, en los diversos períodos de la historia analizada cuya esquema acabamos de recordar. Entonces el problema interesante no consiste en despejar la oposición entre una teoría de la percepción espacial y una teoría de la deducción geométrica, sino en encontrar, en cada uno de los planos que exploraron las diversas epistemologías, en el transcurso del tiempo, las mismas divergencias o las mismas convergencias, expresadas a veces en términos de sensibilidad y otras en términos de construcción lógica. Ahora bien, estas comparaciones son tanto más sugerentes en la medida en que las etapas, estudiadas respectivamente en la

sucesión histórica de las doctrinas, corresponden a estadios, todos reales y actuales, del desarrollo psicológico del espacio. En efecto, no es falso admitir con Kant que el espacio es una forma de la sensibilidad: existe, no hay desacuerdo sobre este punto, un espacio perceptual que de por sí plantea todos los problemas epistemológicos; se trata solamente de saber si este espacio perceptual puede dar cuenta del espacio de la geometría moderna, y en este punto la historia misma resulta suficiente para reestablecer las posiciones adecuadas. Existe también un espacio orgánico, un espacio postural, un espacio sensoriomotor, un espacio de la intuición en imágenes, un espacio de las operaciones concretas, un espacio de las operaciones formales y un espacio axiomático. Lo esencial radica pues en no confrontar así no más las teorías que se refieren a uno de estos planos, sino en poner de manifiesto, respecto de cada uno o respecto de los principales, las posibles variaciones de la interpretación epistemológica.

En este sentido, las principales doctrinas —históricas o actuales— se refieren a las fuentes intuitivas, a la elaboración deductiva, o bien a ambas al mismo tiempo. Por lo tanto, conviene orientar nuestra clasificación esencialmente en función de estas posiciones extremas. Ahora bien, ya se trate de percepción o motricidad elementales, o bien de construcción intelectual, en ambos casos vuelve a encontrarse el cuadro de posibles combinaciones entre la recurrencia a factores internos y factores externos; combinaciones cuyo número es limitado pero susceptible de presentar todas las gradaciones intermedias posibles.

Para cada plano existe una oposición esencial que separa, en primer lugar, las teorías que conciben el espacio, perceptual o conceptual, como una realidad dada ya enteramente constituida, sin porvenir ni construcción alguna, y las que lo interpretan como un sistema de relaciones que se elaboran progresivamente. Llamaremos a estas dos clases respectivamente teorías no genéticas e interpretaciones genéticas. Así, el espacio absoluto de Newton y Clarke, concebido como un *sensorium Dei*, o el espacio de Kant, forma a priori de la sensibilidad trascendental del hombre (es decir *sensorium hominis*), son modelos de concepciones no genéticas; en cambio, el espacio concebido —por Poincaré, Brunschvicg o Enriques— como una coordinación progresiva de los movimientos y las acciones y luego de las relaciones intelectuales, cualitativas o métricas, es una realidad esencialmente genética.

Sin embargo, hay otra oposición que recorta la precedente: puede pensarse que la realidad externa impone el espacio de la geometría, es decir que hay un espacio físico que existe independientemente de nosotros en un mundo de objetos del cual constituye la red o el continente, o bien se lo puede interpretar como una forma de las percepciones o el intelecto del sujeto, impuesta a los fenómenos objetivos a partir del contacto perceptual más elemental, o a medida que se realiza su interpretación racional. Así, entre los puntos de vista no genéticos, el de Newton es esencialmente realista, mientras que el de Kant se apoya en una elaboración endógena; del mismo modo, entre los puntos de vista genéticos, el de Enriques se

apoya en el dato físico interpretado de modo empirista y el de Brunschvicg en la actividad del sujeto.

A partir de lo anteriormente expuesto, surge entonces un cuadro de doble entrada. Una de sus dimensiones es la distinción dicotómica entre las teorías no genéticas y genéticas. Las teorías genéticas son susceptibles de diversos grados, pero no puede concebirse un punto de vista desde el cual se niegue la oposición entre lo genético y lo no genético, puesto que si se quiere suprimir esta oposición se culminará en la negación de la génesis misma. La otra dimensión del cuadro comprende, por el contrario, tres posibilidades: las interpretaciones basadas en el objeto, en el sujeto, o, entre ellas, aquellas que niegan todo dualismo radical entre los factores endógenos y exógenos y los conciben, ya sea como fundidos en un solo todo desde el comienzo (puntos de vista no genéticos), o como relacionados por un sistema de interacciones indisociables (puntos de vista genéticos). Se obtienen así seis posibilidades principales; en ellas podemos reconocer las seis posiciones epistemológicas generales descriptas en el punto 4 de la Introducción, pero aplicadas ahora al problema especial del espacio.

En el plano del espacio perceptual y sensoriomotor, las soluciones no genéticas y las soluciones genéticas llevaron durante mucho tiempo, por una parte, el nombre de apriorismo e "innatismo" y, por la otra, de "empirismo". Sin embargo, deben distinguirse muchos matices en cada una de estas dos clases y en estas últimas décadas se adoptaron nuevas actitudes que no pueden reducirse a este cuadro clásico. El término "innatismo", en particular, recubre en realidad (al menos desde el punto de vista epistemológico) dos soluciones distintas: la que hace de la percepción espacial una "facultad" innata que aprehende directamente desde afuera un espacio ya enteramente construido en el mundo exterior: y aquella que reduce la percepción del espacio a una conciencia de nuestra propia organización, que asimila los datos externos a su estructura interna. Unicamente esta última forma de innatismo puede compararse con el apriorismo kantiano, siendo su traducción psicológica y fisiológica: en cambio, la primera forma de innatismo conduce a un realismo epistemológico. En tercer lugar, en estos últimos años surgió una teoría no genética del espacio perceptual que lleva el nombre de "teoría de la forma" (vinculada con la epistemología fenomenológica) y que admite una organización espacial que abarca en una sola totalidad los factores internos y los factores externos. En cuanto a las teorías que durante mucho tiempo se llamaron "empiristas", hay que distinguir también dos tipos muy diferentes, incluso tan distintos entre sí que conducen a una clara oposición epistemológica: en efecto, si bien ambas son genéticas, únicamente la primera es "empirista" desde el punto de vista del conocimiento, en cambio la segunda conduce al reconocimiento de la existencia de una interacción relativista entre el sujeto y el objeto. La primera funda al espacio en las "sensaciones" asociadas entre sí, y la segunda lo sustenta en la acción (a partir de la motricidad y la actividad sensoriomotriz y perceptual). Además, se intercala entre estas teorías el punto de vista —desconocido en el siglo XIX— del convencionalismo, que Poincaré

intentó fundar a partir de un análisis que también se remontaba hasta la coordinación sensoriomotriz.

En resumen, las teorías genéticas del espacio perceptual conducen a una primacía del objeto (empirismo propiamente dicho), a una primacía del sujeto (convencionalismo), o bien a una interacción entre ambos (relativismo de la acción). Estos tres puntos de vista corresponden así, término a término, con las soluciones no genéticas: primacía del objeto (innatismo realista), primacía del sujeto (apriorismo), e interacción (fenomenología de la "forma"). Esta correspondencia resulta incluso tan evidente que se la vuelve a encontrar en muchos grados intermedios entre los dos extremos de cada par: por ejemplo, la teoría de Wundt se encuentra a mitad de camino entre el innatismo de Hering y el empirismo de Helmholtz; el convencionalismo de Poincaré se apoya en una interpretación sensoriomotriz de los "grupos de desplazamientos" que no está alejada del innatismo apriorista; por último, desde la "teoría de la forma" hasta la del espacio activo y motor pueden concebirse todas las transiciones que unen una interpretación estática al dinamismo de la acción.

En cuanto a las interpretaciones del espacio deductivo y, en particular, de las diversas formas de la geometría axiomática, se vuelven a encontrar las mismas seis posibilidades pero con una transposición importante de los términos presentes. En el caso del espacio perceptual, el sujeto es el yo que percibe y el objeto está constituido por las formas o las figuras de los cuerpos; en cambio, en el caso del espacio deductivo —y, en particular, de esta deducción depurada que caracteriza a la axiomática contemporánea—, el sujeto está representado por la actividad deductiva formalizada, siendo entonces el objeto todo aquello que se considera como exterior a esta actividad formal (o, según los puntos de vista, en interacción con ella), es decir que es espacio "intuitivo" como dice el geómetra, ya se conciba esta realidad intuitiva como la expresión de una experiencia física posible, o simplemente como un dato externo a la deducción axiomatizada. De donde surgen las seis combinaciones siguientes.

En primer lugar, cabe distinguir las concepciones no genéticas de la axiomática geométrica —es decir, aquellas que consideran las proposiciones de la geometría deductiva como teniendo una consistencia permanente, independientemente de su descubrimiento histórico y de las operaciones psicológicas presentes en su elaboración— y las concepciones genéticas —según las cuales la axiomática misma se halla en constante transformación y no se la puede independizar de su propia construcción mental—.

Entre las concepciones no genéticas, se encuentra la primacía del objeto, la del sujeto y la interacción entre ambos. El objeto y el sujeto se definen del modo que acabamos de señalar. El realismo del objeto consistirá, en el caso del pensamiento axiomático, en considerar los principios admitidos como axiomas, o las proposiciones construidas mediante ellos, como la expresión de una facultad que aprehende directamente seres (de razón o experimentales) exteriores a ella. Así, para los griegos, los axiomas, considerados como verdades evidentes, traducen la existencia de formas exteriores a nosotros. Según Russell expresan a priori, pero de

modo analítico (y sin construcción sintética inherente al sujeto), la posibilidad de la experiencia y se hallan en una situación comparable a la de los conceptos lógicos en tanto conocimiento inmediato de los universales [3], etc. Las concepciones caracterizadas por la primacía del sujeto consistirán, por el contrario, en admitir una construcción axiomática (por lo tanto, depurada de toda intuición) que se bastará a sí misma y no corresponderá a lo real (intuitivo o experimental) salvo como marco necesario, común al espíritu y a las cosas. Así, D. Hilbert, en un interesante artículo acerca de las relaciones entre la lógica y la realidad, considera que los axiomas de orden y congruencia se aplican a lo real (por ejemplo, a las leyes de la herencia o biología), no porque se los extraiga de las cosas, sino porque provienen de lo que él llama una especie de "armonía preestablecida", es decir, una preformación sintética a priori que condiciona a la vez al espíritu que piensa y a lo real pensado por él.[4] Por último, el punto de vista de la indisociación entre el espíritu y las cosas está representado por las interpretaciones fenomenológicas que ven en la construcción geométrica la expresión de intuiciones racionales de diversos órdenes, escalonadas entre la intuición vulgar y lo que M. Winther ha llamado tan acertadamente el conocimiento "transintuitivo".

En cuanto a las interpretaciones genéticas, se encuentran tres posibilidades: la primacía del objeto, la primacía del sujeto y la interacción entre ambos. El primero de estos tres puntos de vista está representado por aquellos autores que explican la construcción de las axiomáticas por una abstracción progresiva a partir de los datos sensibles y la experiencia física. Enriques inauguró esta vía en el campo de la filosofía geométrica y Gonseth desarrolló una teoría del esquematismo que examinaremos más adelante (en el punto 11); según él, el "esquema" que caracteriza el armazón de las axiomáticas es simultáneamente la expresión de las conductas del sujeto y la visión simplificada o "sumaria" de los caracteres del objeto, pero con una tendencia a la acentuación de este segundo aspecto. La primacía del sujeto se afirma, por el contrario, en las teorías convencionalistas —la más decisiva es la de H. Poincaré— y que vuelven a encontrarse en parte en algunas de las concepciones de la epistemología nominalista del círculo de Viena, cuya concepción de convención adquiere entonces la forma del "lenguaje" lógico o "tautológico". Por último, la interacción entre el sujeto y el objeto constituye la idea central de las interpretaciones operatorias de la deducción espacial o geométrica, interpretaciones que vuelven a encontrarse en parte en Enriques y, en particular, en Gonseth (a pesar del acento que ambos ponen en el objeto más que en la acción) y que hemos de desarrollar en la segunda parte de este capítulo.

Ahora, lo importante, ya que hemos clasificado estos diversos puntos

[3] B. Russell: *An essay on the foundations of geometry*. Cambridge, 1897, y "Sur les axiomes de la géométrie", *Rev. Mét. Mor.*, 1899, pág. 687: "Lo que puede descubrirse por medio de una operación debe existir independientemente de esta operación: América existía antes de Cristóbal Colón".

[4] D. Hilbert: "La connaissance de la nature et la logique". Trad. M. Müller. *Enseignement math.*, t. XXX, págs. 22-23, en particular, págs. 27-30.

de vista, es examinar sucesivamente (y sin confundirlos) los problemas del espacio perceptual o sensoriomotor y los problemas de lo que hemos de llamar el espacio operatorio, confrontando los principales tipos de hipótesis distinguidos hace un instante con los datos psicogenéticos actualmente conocidos.

2. El espacio perceptual. A. El "innatismo" y el "empirismo". Herencia y sensación. En el mundo externo percibimos formas, sucesiones ordenadas, proyecciones, similitudes, distancias (en particular, en profundidad) magnitudes bi o tridimensionales, etc. Cabe pensar entonces que el espacio se da a través de la percepción del objeto percibido y, en primer lugar, nada parece más evidente que la tesis empirista según la cual basta disociar estos caracteres espaciales de las otras cualidades de la realidad sensible para obtener, por abstracción, un espacio a la vez experimental e intuitivo (en tanto la imagen prolonga la sensación). Y, sin embargo, en el terreno mismo de la crítica filosófica, el análisis reflexivo de Berkeley, en su famoso "*Ensayo sobre una nueva teoría de la visión*" ya demuestra que no se "ve" directamente el espacio y tampoco los objetos en el espacio. Después que el pensamiento de Hume terminó por disolver el soporte sustancial del espacio exterior, Kant invirtió la relación inicial establecida por el empirismo, entre el sujeto que percibe y las cosas, situando el espacio en la sensibilidad a priori del sujeto.

Este conflicto entre el empirismo y el apriorismo filosófico ¿puede acaso resolverse en el terreno de la psicología genética? Por cierto, esta psicología sólo alcanza las percepciones espaciales en situaciones en las que el sujeto se encuentra en relación con una experiencia, y el examen de estas percepciones sólo puede realizarse en un orden cualquiera de sucesión; de ahí surge la apariencia de un prejuicio en favor de la experiencia y la génesis progresiva. Sin embargo, no se trata sino de una apariencia. Si el espacio constituye una forma a priori que preexiste a la práctica de nuestros órganos sensoriales y a todo contacto motor —perceptual o intelectual— entre el sujeto y las cosas, ello sólo puede reconocerse no obstante en el momento en que se produce esta práctica y este contacto. Los biólogos están acostumbrados a razonar con ciertas variaciones que sólo se producen en un medio determinado, pero sin embargo tienen como causa la actualización de un carácter endógeno latente, y nada impide recurrir a una explicación semejante en un plano puramente mental para dar cuenta de las organizaciones perceptuales que la experiencia no impone al sujeto, sino que, por el contrario, emanan únicamente de él. Es cierto que todo recurso a la herencia no hace sino colocar más atrás el problema epistemológico, y que este problema debería plantearse desde el primer contacto perceptual entre los organismos ancestrales y el medio percibido. Pero, a falta de certeza, el análisis psicobiológico podría, sin embargo, proporcionar una prueba inductiva de alto grado de probabilidad en favor del apriorismo, si él fuera verdadero. Por el contrario, si las mismas experiencias repetidas provocan en sujetos de diferente edad mental (o mejor

aún en estadios sucesivos de desarrollo del mismo sujeto) reacciones perceptuales que ponen de manifiesto organizaciones espaciales muy diferentes, el apriorismo saldría debilitado de esta prueba. E incluso si se formulara entonces la hipótesis de una maduración endógena de las estructuras a priori, podría seguirse pensando en la disociación de los factores internos y externos, así como en la de la maduración y la práctica, puesto que ella corresponde a una de las tareas actuales de la psicología genética.

Por lo tanto y con todo derecho, Johannes Müller, Helmholtz, Hering, Kundt, Panum, Wundt y muchos otros, llevaron la cuestión del empirismo y el apriorismo al terreno de la psicofisiología, y algunas variedades del "innatismo" fueron consideradas como traducciones fisiológicas o psicológicas de la tesis kantiana que afirma la existencia de una "forma" de sensibilidad trascendental. En efecto, Kant no ha negado nunca que el espacio genere una toma de conciencia solamente cuando se produce la experiencia: simplemente afirmó que esta experiencia no explica al espacio, sino que provoca una actualización de formas virtuales anteriores a ella (el razonamiento es susceptible de repetirse en el plano del *sensorium* ancestral). Ciertos tipos de teoría innatistas afirman lo mismo pero, como hemos visto en el punto 1, no todas ellas son idénticas entre sí desde este punto de vista, puesto que atribuir a la retina —con Joh. Müller y Hering— un poder innato para percibir las distancias y las dimensiones puede ser tomado en un sentido kantiano o, por el contrario, puede remitirse a la hipótesis de una facultad hereditaria, que permite leer de modo inmediato (sin práctica ni experiencia algunas) los datos del mundo físico exterior. El gran adversario de las teorías innatistas, Helmholtz, dice en efecto "que ellas atribuyen la localización de las impresiones en el campo visual a una disposición innata, ya sea porque el alma tiene un conocimiento directo de las dimensiones de la retina, o bien porque la excitación de fibras nerviosas determinadas da lugar a ciertas representaciones de espacio a través de un mecanismo preestablecido".[5] Helmholtz considera como "una extensión de la opinión de Kant" la teoría de Joh. Müller, de quien cita este sorprendente texto: "no puede existir sensación alguna fuera de la idea de espacio y tiempo. Pero en cuanto a aquello que llena el espacio, sólo nos *sentimos* a nosotros mismos en el espacio, cuando hablamos de sensación o sentido; el juicio nos permite distinguir, en el espacio objetivamente lleno, solamente las partes de nosotros mismos que están en estado de afección, sensación acompañada de la conciencia de causa externa de la excitación. En cada campo visual, la retina ve su propia extensión en el estado de afección", etc.[6] Sin embargo, para otros fisiólogos —y, en particular, en Hering, cuando sustituye la tesis global de su predecesor por un análisis detallado de las regulaciones fisiológicas presentes en estos mecanismos "innatos"— la percepción del espacio se

[5] H. Helmholtz: *Optique physiologique*. Trad. Javal y Klein. París, Masson, 1867, pág. 1010.

[6] Trad. de J. Müller: *Zur vergleichenden Physiologie des Gesichtssinns*, pág. 54.

convierte simplemente en una facultad de aprehender directamente los datos externos.

Ahora bien, e independientemente de estos diversos matices aprioristas o realistas, el innatismo tuvo que enfrentarse con un retorno ofensivo del empirismo, que sostiene la necesidad de la experiencia, y en particular del ejercicio motor (movimientos de los ojos para las percepciones visuales, etc.), para la construcción del espacio perceptual. Sin embargo, el "empirismo" mismo se ha presentado, desde el punto de vista epistemológico, en las formas más diversas y a menudo muy alejadas de las que corresponden a este término en el campo de la teoría del conocimiento en sentido estricto. En efecto, recurrir a la experiencia y la motricidad puede conducir a una interpretación basada exclusivamente en las sensaciones (visuales, táctiles, etc., o motrices, es decir, kinestésicas) así como a sus asociaciones, pasivamente sufridas; nos encontramos entonces en la línea clásica del empirismo. Sin embargo, con los "signos locales" de Lotze, los "signos locales complejos" de Wundt, y en particular con los signos locales interpretados de entrada mediante razonamientos inconscientes, como en Helmholtz, nos alejamos cada vez más del empirismo epistemológico. Cuando Helmholtz escribe que "las sensaciones son, para nuestra conciencia, signos cuya interpretación corresponde a nuestra inteligencia",[7] y que considera cada percepción espacial como solidaria de toda la experiencia anterior del sujeto constantemente interpretada con la ayuda de la motricidad, "la repetición singular de la asociación de dos representaciones" se nos impone entonces "con tanta más intensidad y necesidad cuanto más a menudo se nos ofrece" [8] se convierte en una fórmula que, al mismo tiempo que conserva su forma clásicamente asociacionista, deja entrever muchos otros desarrollos diferentes de los del empirismo. En cuanto a Wundt —que afirma no ser apriorista ni empirista, pero que Helmholtz clasifica entre los empiristas— sabemos que recurre, en lugar de los "razonamientos inconscientes" del gran fisiólogo, a una síntesis o fusión (*Verschmelzung*) de las sensaciones, unas retinianas (pero sin localización innata y sencillamente indicadoras de la existencia de posiciones distintas) y las otras relativas a la rotación del ojo.[9] Wundt considera que esta fusión, anterior a la toma de conciencia, implica una "génesis" del espacio, apoyada en procesos sensoriomotores complejos: una base hereditaria sensorial, pero carente de significación espacial de los elementos como tales, y una síntesis construida en relación con el ejercicio motor, pero preconsciente. Vemos que el "empirismo" de Wundt, así como el de Helmholtz, deja un margen bastante amplio de posibles interpretaciones epistemológicas.

Hay dos problemas fundamentales que, pensamos, plantean frecuentes conflictos históricos entre el "innatismo" y el "empirismo": el de la herencia de los marcos perceptuales y el de la significación epistemológica de la

[7] *Optique physiol.* Trad. mencionada, pág. 1001.
[8] *Ibíd.*, pág. 1002.
[9] W. Wundt: *Grundzüge der Physiologischen Psychologie.* Leipzig, Kröner.

"sensación". Estos dos problemas, por otra parte, son solidarios entre sí. Respecto del primer punto, hay que distinguir además dos cuestiones: la de la génesis biológica de las formas hereditarias y la de las relaciones entre las estructuras innatas eventuales y el conocimiento actual del sujeto individual (conocimiento tal como se manifiesta en el transcurso de la psicogénesis). La discusión de esta segunda cuestión nos conduce al problema del papel epistemológico de la sensación.

Recurrir a la herencia presenta pues dos clases de cuestiones muy diferentes. Ahora bien, desde el punto de vista epistemológico y en cuanto a la formación de las estructuras hereditarias, atribuir a ciertas estructuras la cualidad de transmitirse hereditariamente no significa prácticamente nada: simplemente se desplaza el problema y todos los problemas vuelven a encontrarse entonces en el terreno de lo biológico. Si la retina tiene el poder innato —como quería Joh. Müller— de percibir las distancias por una especie de toma de conciencia directa de las imágenes que se imprimen en ellas,[10] y si toda impresión retiniana implica —como agregaba Hering— una sensación de altura, anchura e incluso profundidad (por una combinación de puntos correspondientes de una retina a otra, que proporcionan de a dos la misma localización y son llamados "idénticos"), para decidir la significación epistemológica de estas facultades innatas, se trata entonces de averiguar cómo se ha formado la retina en el transcurso de la serie animal que culmina en el hombre. Si por azar la solución lamarckiana que propone una lenta adquisición de los órganos en función del hábito y las presiones del medio fuera verdadera, la conjunción de la hipótesis de la herencia de lo adquirido con el innatismo espacial desembocaría en definitiva en una justificación del empirismo epistemológico, aun cuando el espacio, innato en el hombre, se impusiera a priori en el sujeto. Pero cuando el innatismo se apoya en una preformación biológica o en una mutación, sustentada en explicaciones puramente endógenas, de las variaciones hereditarias, el recurso al innatismo implica la negación de las interpretaciones empiristas en el sentido epistemológico. Lo que acabamos de afirmar para la retina se aplica naturalmente a cualquier otro órgano que intervenga en la construcción del espacio, por ejemplo, los músculos del ojo —cuyos movimientos intervienen, según Lotze, Helmholtz y Wundt, en la estimación de las distancias (y que, según Lotze, están controlados por reflejos que se relacionan hereditariamente con los signos locales) o los órganos de equilibrio mencionados luego por Cyon, etc.

En resumen, si se vincula la génesis del espacio con la estructura innata de un órgano, sea cual fuere, o del organismo en su totalidad, el problema epistemológico, en vez de situarse en términos de relaciones entre la actividad del sujeto y los objetos dados en la experiencia, debe situarse entonces en el terreno de las relaciones entre la actividad orgánica o morfogenética y el medio ambiente. Ahora bien, como veremos más detallada-

10 "J. Hering y A. Kundt llegaron a admitir que el alma veía directamente las distancias de dos puntos retinianos, no en función del arco retiniano, sino en función de la cuerda." Helmholtz: *loc. cit.*, pág. 1011.

mente a propósito de la epistemología biológica, este desplazamiento de los problemas no los hace desaparecer ni tampoco los atenúa en absoluto, y surgen las mismas soluciones (las seis combinaciones enumeradas en el punto 1 de este capítulo 2, o en el punto 4 del capítulo 1) en el dominio de las interpretaciones de la evolución y la variación orgánicas. Por más atrás que nos remontemos, y aun si nos colocamos en el punto de vista totalmente hipotético del primer cuerpo vivo microscópico diferenciado de la realidad físicoquímica que entonces le sirve como medio, siempre puede concebirse que este medio se imprime sobre él a través de las presiones exteriores mencionadas por el empirismo; pero también puede considerarse que este ser vivo impone a los otros cuerpos sus estructuras endógenas, generadas por un mecanismo que ha regulado su formación (y que en este caso sería la resultante de relaciones necesarias, que desempeñan un papel de a priori en relación con los intercambios ulteriores); por último, puede reunirse este organismo naciente y su medio en un solo sistema de interacciones que expliquen su evolución después de haber dado cuenta de su misma génesis. Recurrir a la herencia implica pues pura y simplemente remitir el problema epistemológico a la biología y no es en absoluto una solución de este problema.

Si recurrir a la herencia retrotrae las soluciones más que adelantarlas, en cambio hay un segundo problema respecto del cual la psicología genética puede proporcionarnos ya algunas enseñanzas, sin por ello esperar que se resuelva el problema biológico de la evolución y la organogénesis: se trata de saber cómo una estructura espacial hereditaria se impone a la percepción o la inteligencia del sujeto. Este segundo problema, que más atrás hemos distinguido del problema de la herencia misma es, en efecto, muy diferente y en ciertos sentidos tan importante para ia epistemología como lo sería la solución del problema de la herencia biológica: se trata de la ontogénesis, opuesta a la filogénesis y al mismo tiempo, como sabemos, en parte solidaria de esta última.

En este punto el conflicto entre el "innatismo" y el "empirismo" resulta de lo más instructivo cuando se lo examina retrospectivamente y cuando se compara la posición actual de los problemas. Si leemos a Joh. Müller, Hering o a los innatistas más recientes —Stumpf o Dunan—, cabe pensar que el sector hereditario de la percepción espacial tiene la propiedad de explicar el espacio en su totalidad, como si este nivel de las estructuras innatas constituyese la base, amplia y sólida, de una especie de pirámide cuyos escalones disminuirían en dimensión e importancia a medida que uno se eleva hasta un extremo superior exiguo y frágil que correspondería al espacio conceptual o deductivo. Así, las distancias —concebidas según Joh. Müller y Hering como relaciones retinianas hereditarias y ya organizadas en los tres ejes de coordenadas del espacio euclidiano— serían el fundamento de toda percepción ulterior y de toda construcción racional de las longitudes, etc. Ahora bien, el cuadro que nos sugiere el estado actual de los conocimientos psicogenéticos, en el dominio del espacio, es exactamente el inverso. Suponiendo que pueda admitirse una percepción hereditaria de las distancias en las tres dimen-

siones (formulemos por un instante esta hipótesis) sólo se trataría de un sector limitado del espacio próximo: sobre este pequeño escalón inicial, habría entonces que colocar un escalón más amplio correspondiente a las distancias conquistadas en el transcurso de la actividad sensoriomotriz, y luego de este escalón vendría otro aún más importante constituido por la representación intuitiva de las distancias, etc. En resumen, se obtendría así una pirámite invertida, que se apoyaría en su vértice y se ampliaría a medida que aumente su altura, es decir, con los niveles de desarrollo cada vez más alejados de lo dado hereditariamente. Más precisamente, sería necesario recurrir a una especie de espiral con círculos cada vez más amplios, que se integrarían a los anteriores y cuyo punto de partida sólo mantendría un contacto con las estructuras orgánicas innatas.

Examinemos un ejemplo perteneciente a un dominio donde el papel de la herencia es mucho más seguro que en el caso de las distancias entre signos locales retinianos. Existe una organización postural que controla las posiciones del propio cuerpo: sea cual fuere el mecanismo hereditario, podemos —incluso desde muy temprano— colocarnos en posición recta o vertical, y en posición acostada u horizontal. Mucho antes de saber caminar, el bebé sabe sostener su torso o su cabeza en posición erguida y esta postura equilibrada se distingue de una serie de otras posibles posturas. Por lo tanto, con todo derecho puede hablarse de un espacio postural para designar el conjunto de las coordinaciones entre los movimientos y las posiciones que caracterizan esta forma de actividad orgánica (que desempeña incluso, como lo ha mostrado Wallon, un papel importante en los comienzos de la vida mental) y, desde este punto de vista, el conocimiento práctico de la vertical y la horizontal puede considerarse como siendo hereditario. Por el hecho de que se admita que una conducta innata implica estas dos relaciones, ¿será necesario acaso deducir que se encontrarán en todos los otros niveles de la conducta, y que un niño pequeño sabrá percibir los objetos y luego imaginarlos por medio de la representación intuitiva, y por último combinar operaciones en función de estas mismas relaciones de verticalidad y horizontalidad? Dicho de otro modo, la postura erecta hereditaria ¿implica acaso la existencia de una percepción innata de la vertical y luego una intuición innata y, por último una "idea innata" de esta vertical? La observación muestra que en absoluto es así. Por más que el niño pueda mantenerse parado a partir de la segunda mitad del primer año, y acostado desde su nacimiento, habrá que esperar hasta los 7-8 años, y más aún, para que pueda representarse intuitivamente las verticales y las horizontales y, sobre todo, para que las coordine entre sí en un sistema operatorio de referencias: cuando se solicita al niño que, por ejemplo, dibuje chimeneas verticales sobre un techo, postes verticales sobre la pendiente de una colina, el nivel horizontal del agua en un recipiente inclinado, etc. (o que simplemente coloque cartones que representan estos objetos, sin tener que dibujarlos), se observa que no puede establecer relación alguna entre los objetos en función de los elementos de referencia dados perceptualmente (la mesa, el soporte del recipiente,

las paredes de la pieza, etc.). Su espacio intuitivo aún no está estructurado en función de los ejes de coordenadas proporcionados por los objetos verticales y horizontales.[11] Aun más, cuando se examina la percepción de las inclinaciones —entre los 5 y 7 años—, vuelve a encontrarse un defecto semejante de estructuración de conjunto (véase más adelante el punto 3). El conocimiento práctico de sus propias posturas verticales u horizontales no produce de entrada las estructuras perceptuales, intuitivas u operatorias que podrían esperarse.

Todo sucede como si existieran muchos niveles sucesivos de actividad, relativamente independientes en el sentido de que, en cada uno, es necesaria una nueva reconstrucción que toma elementos de los niveles precedentes, pero los integra en una totalidad no determinada por ellos: los elementos hereditarios iniciales están pues lejos de constituir intuiciones o conceptos innatos válidos para todos los niveles; por el contrario, sólo culminan en estructuras ya armadas en el nivel específico y limitado que sirve, no como base estática, sino —por así decirlo— como trampolín o plataforma de lanzamiento para el conjunto de las ulteriores construcciones. Por lo tanto, si, retornando a las hipótesis innatistas que se refieren a las distancias en las tres dimensiones, se afirma que la retina es el asiento de una estimación innata de las longitudes, ello no significa en absoluto que ese núcleo perceptual hereditario sea capaz de determinar de por sí la construcción de todas las percepciones y todas las intuiciones ulteriores de la distancia. Ello significa a lo sumo que el recién nacido logrará de entrada distinguir algunas magnitudes bien diferentes, pero sin prejuzgar acerca de un desarrollo ulterior de las percepciones ni, en particular, de la construcción intuitiva y luego operatoria de los conceptos de magnitudes elaborados sólo mucho más adelante: de ningún modo puede considerarse que estas magnitudes son un sistema de conceptos innatos, por el solo hecho de que se establece la existencia de un núcleo perceptual hereditario, relativo a cierta escala de espacio próximo.

Admitir que cada uno de estos niveles del desarrollo comprendido entre las primeras percepciones posnatales y las construcciones formales que culminan alrededor de los 11-12 años, está desencadenado sucesivamente por la activación de alguna función hereditaria, constituye por supuesto un problema totalmente distinto, ya que es evidente que si la capacidad de formar intuiciones o conceptos formales, etc., se relaciona con ciertos funcionamientos nerviosos heredados, ello no significa para nada que el detalle de estas imágenes o estos conceptos sea innato. La hipótesis del innatismo sólo puede defenderse en lo referente a las percepciones y los movimientos elementales, pero —como acabamos de ver— estos elementos no pueden soportar de por sí todo el peso de las construcciones ulteriores: constituyen un trampolín inicial y no el nivel cuya estructura determinaría de antemano la estructura de todos los niveles ulteriores.

[11] Véase Piaget e Inhelder: *La représentation de l'espace chez l'enfant*, cap. XIII.

Desembocamos así en el segundo gran problema epistemológico planteado por el conflicto histórico entre el empirismo y el innatismo: el de la significación de la "sensación". Cuando hoy vuelven a leerse los famosos debates de Helmholtz, Hering, etc., no puede dejar de sorprender el papel que atribuyen a las sensaciones elementales, ya se trate de sensaciones visuales consideradas como puramente retinianas, o de su combinación con sensaciones cinestésicas variadas. Si para los partidarios del innatismo, las sensaciones que tienen una estructura hereditaria controlan toda la constitución del espacio, para los "empiristas", el espacio sensoriomotor parece contener —él también— en su interior (una vez construido con ayuda de la experiencia) todo el espacio conceptual ulterior, considerado como una simple "abstracción" a partir del espacio sensible. En otros términos, incluso aquellos autores que, como Lotze, Helmholtz y Wundt, reaccionan contra la primacía atribuida de modo ilegítimo a la sensación visual y conceden un lugar a la actividad en la construcción del espacio, limitan esta actividad a un dominio aún extremadamente restringido (el de los movimientos oculares para el espacio visual, etc.), como si las acciones y los desplazamientos del cuerpo en su totalidad no debieran considerarse en su totalidad, según más adelante sostendrá H. Poincaré.

El innatismo puro tiene que ver, en Hering, con lo que podría llamarse una teoría de la sensación-copia; las sensaciones que afectan a la retina tendrían el poder, por su organización innata, de traducir directamente las diversas clases de extensiones externas (las sensaciones correspondientes a las dos retinas se confundirían entonces en una sola). La retina poseería una facultad que innatamente daría lugar a una toma de conciencia directa de su propia extensión; este innatismo se duplica así en una especie de realismo de la sensación, que no se distingue del realismo característico del sensualismo sino por el agregado de una concepción de armonía preestablecida entre la facultad hereditaria de percibir el espacio y la realidad percibida.

Helmholtz tuvo el mérito de oponer a este realismo de la sensación-copia, una concepción de las sensaciones-signos ("signos cuya interpretación corresponde a nuestra inteligencia"). Sí, pero ¿signos de qué y signos utilizados para qué? Quien dice signo, dice que se asimila la cosa significada a un esquema de acción cualquiera: ¿de qué actividad se trata entonces en el caso de los "signos locales" o, de modo general, de las sensaciones espaciales consideradas como signos?

En un texto extremadamente sugerente, J. J. Ampère otorga a su padre, el gran físico A. M. Ampère, la siguiente opinión:

"Por parte representativa de una sensación (opuesta a la «parte afectiva»), no hay que comprender la representación de un objeto externo, ni siquiera la de sus cualidades; ya que la sensación, hablando estrictamente, no representa nada; nace en nosotros en ocasión de una causa que nos es externa; pero esta causa —que es cierta disposición de las moléculas materiales— no puede asemejarse a una impresión recibida por nuestra alma, así como tampoco una campana se asemeja a un sonido. La filosofía

moderna rechazó con razón estas pretendidas imágenes de las cosas que se desprenderían de ellas para impresionar nuestros sentidos y aportar a nuestra alma esas semejanzas con los objetos que Lucrecio llamaba simulacres o «membranas». Nuestras sensaciones no representan pues las causas de nuestras sensaciones como imágenes de estas causas; las representan como signos de su acción".

"Confundir el signo y la cosa significada es uno de los errores más frecuentes del hombre que no reflexiona. Como decía mi padre: «El campesino no puede concebir que el nombre, que es un signo, no sea inherente a la cosa significada, y que el hierro no se llame necesariamente hierro». Así, transformamos nuestras sensaciones en signos de la presencia de los seres que las producen, y a menudo no las distinguimos de estos seres." [12]

Sin embargo, para Ampère como para Maine de Biran, toda actividad susceptible de utilizar estos signos se reduce a un esfuerzo voluntario del "yo", con el doble realismo del sujeto sentido como causa inmediata y del objeto como resistente. De donde surgen los conceptos de una "transferencia" de la "causalidad interior" sobre las cosas y una "transferencia análoga" de la "yuxtaposición continua" de nuestras sensaciones visuales o táctiles sobre los cuerpos, que generan así el "espacio real" en analogía con la "extensión fenoménica".[13] Pensamos que la actividad que se encuentra en la fuente de la construcción del espacio es mucho más profunda: consiste en movimientos cuyas coordinaciones, inconscientes y automáticas, en primer lugar y luego intencionales, se apoyan seguramente en los "signos" constituidos por los datos sensibles, pero de modo tal que incorpore los objetos significados en una red siempre más compleja que permite seguirlos y volver a encontrarlos.

Ahora bien, en este punto se pone de manifiesto la insuficiencia de las primeras teorías "empiristas" —por más exactos que sean los hechos en los cuales se fundaban— en el dominio demasiado restringido de la motricidad que ellas han abordado. Según Lotze, la impresión sobre un punto dado de la retina provoca un movimiento reflejo de dirección determinada, destinado a centrar la imagen en la zona central de visión clara: estos movimientos elementales, asociados a los diversos puntos de la retina, conducirían a que se les atribuyera una función de "signo local", de donde la construcción de una intuición general del espacio. Asimismo —según Helmholtz—, los "sentimientos de inervación" vinculados con el funcionamiento de los nervios oculares permitirían establecer las posiciones de los objetos respecto del cuerpo, por los desplazamientos que estas inervaciones imprimen a las imágenes.[14] Según Wundt, lo hemos visto, habría "fusión" —anterior a la conciencia— entre las sensaciones retinianas y las vinculadas con la rotación del ojo, y las percepciones elementales provenientes de

[12] *Philosophie des deux Ampère*, publicado por J. Barthélemy Saint-Hilaire, París, Didier, 1866, 2ª ed., pág. 34.

[13] *Ibid.*, pág. 82

[14] *Optique physiol.*, pág. 1005.

esta síntesis constituirían los "signos locales complejos" en los que cree este autor. Ebbinghaus, innatista en cuanto a las dimensiones de la altura y el ancho, recurre a construcciones análogas para la profundidad, etcétera.

Sin embargo, por más exacta que sea la idea de una conexión necesaria entre los datos retinianos y los movimientos del ojo, deben señalarse dos reservas fundamentales ante una explicación de la génesis del espacio que se apoye esencialmente en estos mecanismos parciales, y estas reservas son las que conducen a una mayor precisión del problema epistemológico que esta génesis plantea.

La primera es que, durante el período en que se construye del modo más activo el espacio sensoriomotor, es decir, durante el primer año de vida la visión es solidaria de una actividad de conjunto de la cual sólo constituye un elemento restringido. Un ciudadano, que nunca había visto de cerca los Alpes, preguntaba un día, mientras miraba una montaña en forma de pirámide bastantes regular y muy poco punteaguda, cómo los turistas que volvían de allí habían podido encontrar un lugar en la cima, e incluso cómo podía un solo individuo sentarse en ella sin pincharse enojosamente el trasero. Por el contrario cualquier persona que haya escalado alguna vez una montaña percibe de otro modo las montañas que el sujeto para el cual estos objetos no corresponden a esquema de conducta particular alguno. Es evidente que en el caso del bebé sucede forzosamente lo mismo: los marcos de referencias visuales que lo rodean no constituyen en absoluto un espacio antes de que las figuras percibidas se hayan transformado en objetos de acciones y antes de que se haya constituido entre estos objetos un sistema de coordinaciones prácticas. Porque un solo campo perceptual no es suficiente para determinar un espacio, puesto que el espacio constituye el tránsito posible de un campo a otro. En cuanto a las percepciones visuales particulares —como por ejemplo las de un juguete, una lámpara o un rostro— sólo una sucesión de acciones de manipulación, desplazamiento, etc., les permitirán organizarse espacialmente: nuevamente aquí el espacio es no sólo la resultante de percepciones momentáneas, sino en particular de la posible coordinación de las percepciones sucesivas, y esta coordinación no sólo está asegurada por los movimientos de los músculos del ojo, sino por la actividad en su totalidad. Por cierto, en el plano de la percepción, ya existe una actividad perceptual que consiste en dirigir las miradas, comparar, analizar, etc. (volveremos sobre el tema en el punto 4), pero la constitución del espacio está lejos de depender únicamente de ella y supone una relación con el conjunto de las acciones restantes.

Surge entonces la segunda reserva. Si la inversión de objeto es necesaria para asegurarle una forma constante en las tres dimensiones, si los desplazamiento en torno a un objeto fijo son indispensables para alcanzar una coordinación de las perspectivas que genera, si los movimientos de la mirada son la condición de la evaluación de una longitud, etc., ¿cómo habrá entonces que caracterizar la función epistémica esencial del movimiento, o más precisamente de la acción sensoriomotriz? En este sentido

lo que constituye el instrumento de conocimiento más importante ¿es la "sensación" cinestésica, la impresión muscular, el "sentimiento de inervación" (si es que existe), etc.? Si la sensación es un "signo" es evidente que no. La "sensación" motriz sólo es un índice, como lo es la "sensación" visual, etc., y reducir el movimiento a sus índices sensoriales equivale a eliminar su verdadero valor de conocimiento, en provecho de la señal a través de la cual se manifiesta su presencia o su producción.

Lo esencial de la actividad sensoriomotriz debe buscarse pues en los "esquemas" de conjunto, que constituyen el anuncio de lo que más tarde serán las operaciones del pensamiento, en oposición a las representaciones imaginadas o simbólicas. Aun cuando la toma de conciencia de la acción sólo proceda a partir de su resultado y remonte luego en contrasentido su curso natural, el esquema de esta acción explica este resultado y constituye así el elemento operante del saber, en oposición a los puntos de referencia constituidos por las señales. Por lo tanto, se trata en resumen de encontrar una teoría de la percepción y la actividad perceptual que evite a la vez reducir, por una parte, el objeto sobre el que se realiza la acción a sus índices sensoriales y, por la otra, la actividad sensoriomotriz que se ejerce sobre él únicamente a las sensaciones internas que ponen de manifiesto su existencia.

3. El espacio perceptual. B. La interpretación "guestaltista" de las formas geométricas. Durante todo el siglo xix, los autores de trabajos experimentales cuyas tesis acabamos de analizar creyeron en la existencia de "sensaciones" que podían aislarse (al menos teóricamente), adoptaran una posición "innatista" o "empirista". Además todos estuvieron de acuerdo, para la interpretación del espacio visual, en otorgar una importancia privilegiada a las imágenes retinianas; los innatistas puros, como Joh. Müller y Hering llegaron incluso a adjudicar a la retina una conciencia de su propia extensión, como si la percepción del espacio consistiera en una lectura directa, sobre la imagen retiniana, de las distancias, las direcciones y las formas. Por el contrario, la teoría de las percepciones espaciales desarrollada por la psicología de la forma (o de la "Gestalt") se inicia por una doble negación de la existencia de las sensaciones aisladas y el privilegio atribuido a la retina. Por otra parte, esta psicología renovó el problema de la percepción planteándolo en términos que implican una epistemología implícita, cuyo interés es evidente. Por lo tanto, vale la pena detenerse en ella de modo especial y precisar, en ocasión de su examen crítico, las posiciones de la epistemología genética respecto de la percepción espacial en general.

Sabemos muy bien que, desde el punto de vista de la psicología de la forma, una percepción no se compone de elementos dados previamente (que corresponderían a las "sensaciones" del asociacionismo atomístico), sino que constituye de entrada una estructura total, porque es solidaria del equilibrio del campo perceptual que se halla comprometido en su totalidad.

Aun la percepción de un solo punto aislado constituye esta estructura de conjunto, ya que ese punto es una "figura" que se destaca sobre un "fondo" percibido como un plano o un espacio de tres dimensiones. Ahora bien, estas estructuras totales o "Gestalten", que caracterizan por lo tanto la totalidad de cada campo perceptual y toda figura particular percibida en el interior de un campo, están organizadas según leyes cuya esencia es geométrica: orden, simetría, regularidad, proporciones, etc. La teoría de la forma proporciona así una nueva concepción de la geometría perceptual presente desde el punto de partida de la vida mental, pero que no se vincula con una hipótesis innatista y abarca la motricidad pero sin recurrir a la experiencia empirista. En efecto, las estructuras espaciales de conjunto que controlan toda percepción visual, serían el resultado de un equilibrio, que se establece en cada caso y de modo casi instantáneo, entre los objetos percibidos —los rayos luminosos que de ellos emanan y afectan luego a la retina— y las corrientes nerviosas que ellos provocan: la retina ya no es sino uno de los eslabones de este circuito total, y las "formas" percibidas, lejos de confundirse con las imágenes retinianas, serán la resultante de la estructura de este todo indisociable, una vez que se ha alcanzado el equilibrio. La teoría de la forma, que escapa simultáneamente al apriorismo y al empirismo, culmina entonces en una fenomenología del espacio, apoyada en un conjunto impresionante de trabajos experimentales.

En este sentido, es necesario distinguir cuidadosamente los hechos mencionados y las interpretaciones de estos hechos. Desde el punto de vista de los hechos, el descubrimiento esencial de los psicólogos "guestaltistas" es la ley de "pregnancia" que expresa que toda estructuración se realiza según las "mejores" formas, es decir, según las formas más equilibradas y más simples posibles. Ahora bien, estas "buenas formas" cuyo estudio fue llevado muy lejos en el dominio de las estructuraciones perceptuales se hallan determinadas por un conjunto de criterios espaciales, esencialmente euclidianos. Sucede así que entre las diferentes maneras, lógicamente equivalentes, de vincular entre sí, mediante líneas virtuales, elementos discontinuos que se presentan simultáneamente, la percepción construye sus figuras en función de la "proximidad" de los puntos considerados (esta idea de proximidad, fundamental para el espacio perceptual, es pensada por casi todos los guestaltistas en el sentido de las distancias euclidianas relativas y no de la "vecindad" topológica). Asimismo, las figuras simétricas se impondrán más fácilmente que las asimétricas, las figuras con relaciones métricas simples más fácilmente que las irregulares, las proporcionadas más que las desproporcionadas, etc. Se sigue de ello que las percepciones más primitivas serán susceptibles de aprehender las figuras euclidianas elementales —los círculos, cuadrados, rectángulos, etc.—, percibidas directamente como formas de conjuntos y no como composiciones que se realizan progresivamente a partir de sensaciones previas aisladas. Un punto importante, que vale la pena señalar en este sentido, es la existencia, en animales de diversos niveles (mamíferos, pájaros e incluso en los insectos), de un reconocimiento de estas figuras geométricas, con

"abstracción" más o menos profunda de las formas de un conjunto dado, según el grado de desarrollo de la especie animal analizada.

Por otra parte, todo objeto percibido en perspectiva o en profundidad se percibe según ciertas estructuraciones generales, como la constancia de las formas (por ejemplo, una ruta de auto percibida proyectivamente como una elipse se reconoce sin embargo de entrada como siendo circular) y la constancia de las magnitudes (el objeto alejado se ve en su magnitud real, por lo menos hasta cierta distancia). Así existiría, en todos los niveles, cierta coordinación de las perspectivas y cierta métrica perceptual. Por otra parte, como todo objeto se percibe en referencia a otros, o en referencia a su fondo, la percepción implicaría también un sistema elemental de coordenadas, proporcionado por las verticales y las horizontales (en ancho y profundidad). Por último, la "transposición" de las formas (reconocimiento de las figuras empequeñecidas o agrandadas) y la percepción de las proporciones constituirían un principio de similitud. En resumen, la percepción implicaría desde el punto de partida mismo cierta geometría, a la vez euclidiana y proyectiva.

Si esta descripción de los hechos es exacta y no requiere ser modificada y atenuada, existe pues en todos los niveles de desarrollo un espacio perceptual ya organizado, análogo al que Kant y los innatistas más resueltos admitían, pero no innato y determinado solamente por las leyes de equilibrio que rigen el circuito total de las influencias externas y las corrientes nerviosas. ¿En qué consisten entonces estas leyes de equilibrio? Aquí comienza la interpretación.

Por el hecho (de observación y experiencia) de que toda percepción constituye siempre una totalidad y no una asociación entre elementos dados de modo aislado y previamente, la teoría de la forma deduce que esta totalidad es irreductible a la suma de sus elementos y que, en consecuencia, es refractaria a toda composición aditiva. Ahora bien, si un círculo, un cuadrado, un sistema de coordenadas, un conjunto de relaciones proporcionales, etc., parecen provenir de este modelo de composición aditiva que constituyen los grupos geométricos (grupo de los desplazamientos, y subgrupo de las rotaciones, mediciones, grupo de las similitudes, etc.) es porque las estructuras, que corresponden a los seres racionales analizados por el geómetra, están lejos de agotar el espacio perceptual y sólo constituyen incluso, hablando con propiedad, casos excepcionales dentro del conjunto de las "formas" o "Gestalten" ordinariamente percibidas. Por el contrario, en el dominio de la organización perceptual, rige la deformación de las partes en función de la totalidad: por lo tanto, se trata del reino de aquello que la psicología clásica ha llamado erróneamente las "ilusiones" de la percepción, es decir, precisamente la manifestación de las coacciones que la totalidad de la figura ejerce sobre algunas de sus partes. Y entonces, por una paradoja en la que convendrá insistir, se encuentra que, si bien las "buenas formas" se confunden a grandes rasgos con las figuras simples y regulares del espacio euclidiano, la inmensa mayoría de las "formas" percibidas habitualmente son formas cuya composición es irreductible a las

leyes de la geometría. Así, los teóricos de la "Gestalt" estuvieron de acuerdo en incorporar a su cuadro de hechos, y en emplear en su argumentación a favor de la primacía de las "totalidades", fenómenos bien conocidos de "ilusiones" o deformaciones espaciales perceptuales: una recta entrecortada con trazos inclinados parece ser más larga que la misma recta sin esos trazos (ilusión de Oppel-Kundt); una recta que tiene sus extremos en forma de flecha hacia afuera parece más larga que si se orientan hacia adentro (Müller-Lyer); un círculo inscripto concéntricamente en otro un poco mayor parece tener un diámetro más largo que el mismo círculo cuando contiene un círculo más pequeño concéntrico (Delboeuf); la percepción sobreestima los ángulos agudos y subestima los ángulos obtusos; el lado pequeño de un trapezoide se sobreestima, etc. Y, en particular, dos magnitudes semejantes sólo se distinguen a partir de cierto umbral de igualdad, que es proporcional a las magnitudes comparadas (ley de Weber): en este caso, la transposición y la proporcionalidad perceptuales desempeñan un papel en el sentido del error y no de la relatividad objetiva. Asimismo, toda diferencia notable de magnitudes se halla acentuada por el efecto de "contraste", etcétera.

Si existe un espacio perceptual organizado de entrada, entonces implica una primera gran diferencia con el espacio de la geometría por el hecho de que, por lo menos, está sujeto a un conjunto considerable de deformaciones sistemáticas. Ahora bien, repitámoslo, la ambición paradójica de la teoría de la Forma consiste en querer explicar, con el mismo principio de las totalidades de composición no aditiva, las formas geométricas como tales y las deformaciones del espacio perceptual, cuando en realidad la oposición entre estas dos clases de realidades constituye quizás el hecho más significativo que ha de tomar en cuenta una epistemología de la percepción.

Sin embargo, antes de iniciar esta discusión, conviene formular una reserva más respecto de los datos experimentales en los que se apoya la teoría de la Forma: no son objetables en este nivel acabado de la evolución de las percepciones que corresponde al hombre adulto, pero son incompletos, e incluso a menudo incorrectos, en lo que se refiere a la evolución de los niños. En efecto, respecto del problema capital de las constancias perceptuales, que domina toda la interpretación dada de las estructuras de la percepción espacial, no se ha verificado que la constancia de las magnitudes aparezca independientemente del desarrollo.[15] Asimismo, la constancia de las formas se elabora durante el primer año en función de los progresos de la manipulación (inversión del objeto, etc.).[16] El esquema del objeto permanente es el resultado de una construcción y es en función de ella que las constancias de la forma y la magnitud se adjudican al

15 Véase Piaget y Lambercier: *Arch. de Psychol.*, XXIX, 1943, págs. 255-308, y Lambercier: *ibid.*, XXXI, 1946.

16 Piaget: *La construction du réel chez l'enfant*. Delachaux et Niestlé, caps. I y II. [Hay versión castellana: *La construcción de lo real en el niño*. Buenos Aires, Proteo, 1970.]

objeto, lo cual muestra suficientemente el papel de la acción en estas construcciones.[17] En cuanto a la organización general del campo perceptual, existe una gran diferencia entre el niño y el adulto respecto del sistema de las coordenadas: es sin duda exacto que toda percepción supone elementos de referencia, pero estos elementos no están organizados en absoluto de entrada según los ejes generales, y se asiste a una generalización gradual —hasta alrededor de los 9-10 años— en este dominio como en otros sectores de la actividad perceptual.[18] En cuanto a las "buenas formas", el carácter progresivo de su "abstracción" —en el animal y en el bebé—, así como la muy lenta evolución de su reconocimiento en el interior de figuras entremezcladas o incompletas,[19] muestra claramente que también en este caso se está ante un desarrollo.

Si pasamos ahora de la descripción de los hechos, así rectificada, a su interpretación, nos encontramos en presencia de un problema que va mucho más allá de las cuestiones precedentes y que se reúne, pero sin abandonar el terreno preciso de la percepción espacial, con el de la epistemología de la percepción en general.

Para la teoría de la forma, cuyos análisis propiamente psicológicos se han prolongado muy rápidamente en una concepción epistemológica de conjunto, las leyes de organización de la percepción traducen una geometría que es simultáneamente la del mundo físico, al menos en algunos de sus aspectos, y la del organismo mismo: las "gestalten" expresarían, en efecto, las leyes de equilibrio que rigen tanto para todos los sistemas de composición no aditiva (es decir, tales que las partes dependen de la estructura del todo), como para los campos electromagnéticos, o los "campos" de corrientes nerviosas,[20] etc. Existirían "formas físicas"[21] tanto como "formas" fisiológicas y psicológicas, y el secreto de la objetividad de nuestra geometría perceptual se encontrará en la conformidad general de estas "formas"; sus deformaciones traducirían entonces los caracteres efectivos del espacio real, en aquellos dominios donde la naturaleza de los campos de fuerza produce la existencia de composiciones no aditivas, en oposición a las relaciones simples dadas entre objetos yuxtapuestos.

Esta solución tendría pues un carácter esencialmente fenomenológico, y se supone que las formas de equilibrio en juego son independientes de toda construcción y rigen a la vez a los objetos y al sujeto, sea cual fuere su nivel de evolución. Sin embargo, esta interpretación presenta dos clases de objeciones, unas desde el punto de vista que llamamos (vol. I, *Introd.*

[17] Piaget: *La psychologie de l'intelligence*. Coll. A. Colin, págs. 130-140. Véase nota 44 del cap. 1.

[18] H. Wursten: "L'évolution des comparaisons de longueurs de l'enfant à l'adulte", *Arch. Psychol.*, XXXII, 1947, págs. 1-144.

[19] P. A. Osterrieth: "Le test de copie d'une figure complexe", *Arch. Psychol.*, XXX, 1945, págs. 205-353.

[20] Por ejemplo, los campos polisinápticos, véase Segal: *Journ. de Psych.*, t. XXXVI, 1939, págs. 21-35.

[21] W. Koehler: *Die physischen Gestalten*. Erlangen, 1920.

punto 7) la epistemología genética "restringida", y las otras desde el punto de vista de la epistemología "generalizada".

Desde el punto de vista "restringido", en primer lugar, es evidente que la reducción de las formas geométricas perceptuales a formas de equilibrio de carácter universal no conserva su valor salvo en la medida en que estas "formas" psicológicas se impongan independientemente del desarrollo. Por el contrario, en la medida en que intervenga una construcción genética, la actividad del sujeto —inútil en la interpretación "guestaltista"— vuelve a adquirir su valor y conduce a otra concepción de las relaciones entre el sujeto y el objeto que la de una indiferenciación radical. Recíprocamente, el papel de las "formas físicas" pierde más su importancia en la medida en que las formas perceptuales correspondientes están elaboradas por la actividad del sujeto.

Sin embargo, desde el punto de vista "generalizado", la concepción de "formas físicas" es muy discutible. Sostener que las rectas, los círculos, los cuadrados, etc., percibidos por el sujeto, le son impuestos por las leyes de equilibrio que rigen todos los fenómenos de composición no aditiva, implica en efecto admitir: 1º la primacía, en la realidad física, de los sistemas de composición no aditiva (por ejemplo, según Köhler, la distribución de las cargas eléctricas en un conductor homogéneo y aislado), en oposición a los sistemas aditivos (por ejemplo, según Köhler, la composición mecánica de las fuerzas); 2º la existencia de las "formas físicas" en la realidad misma, independientemente del pensamiento del físico.

Ahora bien, respecto del primer punto, se puede preguntar si la distinción de los dos tipos de composición —aditiva y no aditiva— en la que se apoya la teoría de la "Gestalt", no descansa sobre una confusión entre dos clases de criterios. Uno sería la solidaridad entre las partes y el todo, es decir, el hecho de que el elemento no puede existir sin la totalidad y recíprocamente; sin embargo, esta idea de la totalidad puede también aplicarse a sistemas de composición aditiva, como los "grupos": en el "grupo" de los desplazamientos, por ejemplo, no puede definirse un desplazamiento particular si no es en función del conjunto (es decir, de los seis parámetros que lo determinan), sin excluir por ello que dos desplazamientos puedan sumarse uno al otro en un desplazamiento total, o sustraerse uno del otro.[22] El segundo criterio sería la deformación de las partes en función del todo. Ahora bien, esta segunda concepción de la totalidad, que corresponde a las totalidades perceptuales, en oposición a los "grupos" y los "agrupamientos" operatorios, se aplica efectivamente a algunos sistemas físicos, pero esencialmente a aquellos donde interviene una mezcla, es decir el azar. En efecto, cuando se produce una mezcla entre los diferentes componentes de una totalidad, esta totalidad ya no aparece como una simple resultante de las partes, sino como una realidad propia susceptible de alterar estas últimas (véanse las energías de intercambio, etc.).

[22] La cosa es aun más clara en el "grupo" aditivo de los números enteros positivos y negativos: un número no existe independientemente de los otros y, sin embargo, los números se suman entre sí.

Entonces, la realidad propia del todo se relaciona con un sistema de compensaciones probables, tales que ninguno de los componentes parciales se presentaría del mismo modo independientemente del sistema total. Por el contrario, en una totalidad por composición aditiva, como el grupo geométrico, los elementos son igualmente solidarios del todo, pero ya no están deformados por él como lo están en el caso de la mezcla.

La confusión entre las dos clases de criterios permite a la teoría de la Forma explicar simultáneamente, y en nombre de los mismos principios, las "buenas formas" de la geometría —que son de hecho productos de la composición aditiva— y las deformaciones de las ilusiones perceptuales —que son las resultantes, como las "formas físicas" con las cuales se las compara, de composiciones no aditivas—, pero (como hemos de ver en el punto 4) por la intervención del azar. Por el hecho de que en todos los casos (es decir, sea la composición aditiva o no) hay solidaridad entre las partes y el todo, la teoría de la Forma concluye que esta solidaridad implica ipso facto la posibilidad de deformaciones: de ahí su facilidad para pasar del espacio perceptual al espacio geométrico, o a la inversa. En realidad, el problema subsiste en su totalidad y lo volveremos a examinar en el punto 4.

En cuanto a las estructuras físicas, tal como se las conoce actualmente, el hecho general es la solidaridad de los elementos y las totalidades, pero esta solidaridad no determina de por sí la existencia de "Gestalten físicas", puesto que se aplica tanto a las composiciones aditivas como a las no aditivas. Los sistemas aditivos están representados por la mecánica; en cambio, los sistemas no aditivos implican un factor de mezcla, por lo tanto de irreversibilidad y deformación, manifestado por "transformaciones no compensadas", como se dice en el lenguaje de la termodinámica. El gran corte que debe introducirse en el seno del mundo físico debe buscarse también entre los fenómenos reversibles y los procesos irreversibles, y estos últimos —que corresponden a las "Gestalten físicas" de Köhler— no necesariamente constituyen un hecho primero como quisiera la teoría de la Forma, sino que plantean el problema de las relaciones entre el azar y la causalidad mecánica.[23] Ahora bien, sea cual fuere la solución que se elija para este último problema, no se ve de qué modo las composiciones no aditivas podrían explicar la génesis de las "buenas formas" de la geometría: cuando una forma simple y regular termina por resultar de un juego de mezclas fortuitas, es en virtud de un juego de compensaciones entre las deformaciones que imita, pero no engendra el orden geométrico.

Sin embargo, suceda lo que suceda con esta discusión (que volveremos a encontrar en el punto 4 a propósito de la percepción en general), el gran problema epistemológico que plantea la interpretación propia de la teoría de la Forma, es saber si las "formas físicas" existen en la realidad objetiva independientemente del pensamiento del físico. En este sentido, es necesario distinguir dos cuestiones que nuevamente corresponden a las

[23] Dedicaremos un capítulo especial a este problema, a propósito de la epistemología física (véase vol. II, cap. III).

composiciones aditivas y no aditivas. En el caso de las totalidades resultantes de una mezcla, ¿por qué no puede calcularse el todo por adiciones de las partes?: porque el azar existe objetivamente o bien porque se trata de una ignorancia de parte nuestra en cuanto a los detalles de las causas. Pero, en uno y otro caso, sólo se concibe, sin duda alguna, en relación con nuestras operaciones de composición combinatoria. Por lo tanto, es difícil admitir que en primer lugar hay que rectificar las estructuras físicas no aditivas para extraer luego de ellas la explicación de nuestro espíritu, en vez de explicar simultáneamente estas formas físicas y las de nuestra estructura mental. Por el momento nos interesa saber si es legítimo rectificar las formas geométricas como formas generales de equilibrio de las cosas para extraer de ellas la explicación de las "Gestalten" correspondientes a nuestras percepciones. Ahora bien, aquí el círculo es evidentemente un círculo vicioso. En efecto, ¿qué queremos decir cuando atribuimos a la naturaleza la posesión de rectas, círculos y otras formas geométricas particulares? Con toda seguridad ellas no existen en el estado de realización completa, puesto que tanto las emisiones de energías como las estructuras de la materia son discontinuas: la horizontal que caracteriza el nivel del agua tranquila no se asemeja para nada a una recta cuando se la examina con el microscopio, etc. Las rectas o las elipses, etc., ¿estarán entonces constituidas por líneas de fuerzas o bien por las trayectorias de los corpúsculos desprovistos de estructura geométrica simple? Pero precisamente, cuanto más avanza el análisis microfísico del espacio más se complica la geometría de los elementos de la realidad: esta geometría no es por ejemplo arquimedea, es decir que las formas métricas elementales no están representadas en ella. En resumen, las formas geométricas "simples" que descubrimos en la naturaleza, como el plano, o la esfera producida por una burbuja de jabón, los diversos poliedros constituidos por los cristales, etc., siempre son relativas a cierta escala de observación y traducen la geometría del observador así como las propiedades de la materia observada. Si la explicación de las formas perceptuales por la hipótesis de las "formas físicas" plantea ya dificultades considerables desde el punto de vista de una epistemología genética "restringida", desde el punto de vista de la epistemología genética "generalizada" se encierra en un verdadero círculo vicioso.

4. EL ESPACIO PERCEPTUAL. C. LA "ACTIVIDAD PERCEPTUAL" Y LA EPISTEMOLOGÍA GENÉTICA DE LA PERCEPCIÓN. Las investigaciones que hemos podido realizar acerca del desarrollo de las percepciones en el niño nos han conducido a oponer a la interpretación "guestaltista" otro sistema de conceptos explicativos, cuya significación epistemológica queremos aclarar ahora en lo referente, por una parte, al espacio perceptual y, por la otra, al valor de conocimiento de la percepción en general.

Toda percepción es un sistema de relaciones, y no hay elemento que se perciba en estado aislado: éste es el hecho fundamental sobre el que insistió la teoría de la Forma y que podemos retener como punto de partida de lo que sigue, independientemente de las interpretaciones rechazadas en el punto precedente.

¿En qué consiste esta relatividad primera inherente a la percepción? Es a la vez muy semejante y muy diferente de la que caracteriza a la inteligencia. Muy semejante porque constituye también un principio de composición. Pero muy diferente porque, contrariamente a una relación lógica como A < B, que no deforma los valores de A y B por el hecho de compararlos entre sí, una relación perceptual deforma en principio los valores entre los cuales se establece una relación: la percepción de la relación A < B [24] tendrá como efecto general sobreestimar B y subestimar A, dicho de otro modo, acentuar la diferencia A < B, salvo en el caso de que esta diferencia sea objetivamente pequeña; en este último caso se la subestimará y se percibirá la relación como una ilusoria igualdad A = B (de acuerdo con la ley de Weber). Unicamente el término de pasaje entre la relación perceptual que acentúa la diferencia A < B y la relación ilusoria A = B producirá entonces una percepción exacta de A < B, sin sobreestimación ni subestimación de la desigualdad; pero esta percepción correcta es una excepción porque constituye el punto de transición o compensación entre dos deformaciones contrarias.

Los dos problemas previos del conocimiento perceptual son pues, por una parte, comprender la razón de estas deformaciones sistemáticas y, por la otra, la propiedad de las composiciones perceptuales basadas en este tipo de relaciones.

Ahora bien, la causa de las deformaciones sistemáticas de la percepción presenta de por sí un gran interés epistemológico. El conocimiento operatorio o racional intenta proporcionar una descripción completa de los objetos analizados, desde el punto de vista en que los aborda la operación en juego, lo cual culmina en una comprensión simplificada, puesto que es relativa a un cierto sistema operatorio, pero no por ello es incorrecta. Por el contrario, la percepción es esencialmente probabilística y procede por una especie de sorteo al azar (de ahí la importancia de su comparación con los fenómenos de mezcla, sobre la que insistíamos en el punto 3). En efecto, cuando dos líneas A y B se comparan perceptualmente entre sí, su estimación respectiva no es la misma según el punto o el segmento que fije la mirada (extremidad, medio, etc.), porque los elementos fijados se dilatan y los elementos no fijados se contraen. Ahora bien, todos los puntos (o segmentos iguales) de una de las dos líneas A y B pueden elegirse como centro de fijación de la mirada, y asociarse con todos los puntos (o segmentos iguales) de la otra. Si esta comparación se realiza con todas las asociaciones posibles, y además en forma simultánea, culminará en una relación objetiva entre las dos líneas. Sin embargo, sucede que sólo se fijan algunos puntos de una y otra línea, y que la comparación se hace entonces por un sorteo al azar entre los posibles puntos de fijación, lo cual produce las deformaciones cuando las líneas comparadas son desiguales (incluso cuando

[24] Por ejemplo, bajo la forma de una comparación entre dos líneas o dos varillas A y B.

los puntos fijados en cada una de las dos líneas se encuentran en posiciones relativas equivalentes: medio, etcétera).

Este sorteo al azar obedece entonces a las leyes de la probabilidad cuyos principios son, a grandes rasgos, los siguientes. Por una parte, toda fijación [25] implica la sobreestimación de la zona fijada y la depreciación de los elementos periféricos: así cuando se compara un patrón fijo con magnitudes variables, basta que se mire más o mejor el patrón para que se lo sobreestime.[26] Por otra parte, resulta claro que estas dilataciones y contracciones respectivas de las zonas centrales y periféricas alternan sin cesar entre sí, puesto que lo que es central puede hacerse periférico y recíprocamente a medida que se realizan los desplazamientos de la mirada: la descentración, es decir, el establecimiento de relaciones entre las centraciones diferentes y sucesivas es pues un factor de corrección y regulación, según una ley general que volveremos a encontrar en otras formas y en muchos otros dominios diferentes del de la percepción. Se sigue entonces que si las líneas comparadas A y B son iguales, la centración sobreestima alternativamente una y luego otra, y si no hay causa alguna que determine una mirada preferencial sobre una de las dos líneas (por ejemplo, una elegida como patrón), las deformaciones alternativas se compensarán por descentración. Si, por el contrario, las líneas son desiguales, A < B, y bastante diferentes entre si, los puntos fijados con mayor probabilidad serán los correspondientes a la parte de B que superen a A, y entonces se producirá un refuerzo de la diferencia A < B.[27] Si, por el contrario, la diferencia entre A y B es mínima, entonces en la relación objetiva A < B (que es inferior al coeficiente de dilatación de la línea A cuando la mirada se concentra, de donde las visiones sucesivas contradictorias A > B y A < B), los puntos diferenciales se fijan con tanto menos probabilidad cuanto menor es esta diferencia, de donde la igualdad ilusoria (A = B, resultante del equilibrio entre las sucesivas visiones A > B y A < B) que caracteriza lo que se ha llamado el umbral diferencial. Ahora bien, como estas probabilidades son función de la relación entre las magnitudes consideradas, el umbral diferencial presenta una extensión que es proporcional a estas magnitudes: esta proporcionalidad constante se expresa por la llamada ley de Weber-Fechner, que constituye entonces un caso particular de la ley de las centraciones relativas e implica, como esta última, una explicación probabilística basada en el cálculo de las combinaciones entre los posibles puntos (o los segmentos) de centraciones.[28]

Aclarado este punto, es claro que si, por principio, las relaciones perceptuales se deforman en virtud de su propiedad estadística, y no se adecuan rigurosamente con los datos objetivos que traducen, no podrían componerse

[25] Táctil y visual, etcétera.
[26] Véase Piaget y Lambercier: *Arch. de Psychol.*, XXIX, 1943, pág. 173.
[27] Este refuerzo puede calcularse en función del mecanismo de las "centraciones relativas".
[28] Véase J. Piaget: "Essai d'interprétation probabiliste de la loi de Weber et de celle des centrations relatives", *Arch. de Psychol.*, XXX, 1944, págs. 95-138.

entre sí en función de leyes lógicas: su composición resultará de combinaciones probables y no operatorias. Examinemos, en primer lugar, en qué consiste esta composición y luego intentaremos despejar la propiedad de la actividad combinatoria de orden perceptual que asegure su realización.

Si para caracterizar la estructura de las operaciones de la lógica cualitativa nos referimos a los "agrupamientos" descriptos en el punto 3 del capítulo 1, comprobamos, en efecto, que ninguno de los criterios del agrupamiento se aplica a las composiciones de las relaciones perceptuales, lo cual equivale precisamente a afirmar lo que siempre ha sostenido la teoría de la Forma: que las composiciones perceptuales no son transitivas, es decir que la composición de dos de ellas no determina unívocamente una tercera: si por ejemplo A y B y luego B y C se confunden en virtud de la ley de Weber, puede tenerse la sucesión $A = B$; $B = C$ y $A < C$. Las relaciones perceptuales no son reversibles, puesto que sus mismas deformaciones implican constantemente "transformaciones no compensadas" [29]: así una sucesión de elementos graduados no produce las mismas estimaciones perceptuales si se los compara en orden ascendente o descendente. Las relaciones perceptuales tampoco son asociativas, puesto que la percepción final de una sucesión de percepciones sucesivas depende del camino recorrido. Ignoran toda identidad general puesto que no puede volver a encontrarse del mismo modo una percepción inicial: por ejemplo, la temperatura de una pieza parece más elevada, o menos elevada, si se entra en ella después de haber salido un instante al frío, etc. Por último, la percepción ignora toda distinción clara entre la tautología y la reiteración, puesto que la repetición de una misma percepción la deforma, pero no con relaciones numéricas simples.

De modo general, se ve así que el conocimiento perceptual, incluso limitado a su dominio específico —el del contacto directo con el objeto— es no sólo deformante, sino además fundamentalmente irracional en sus composiciones más elementales. En estas condiciones resulta claro que la percepción de las "buenas formas" geométricas —un círculo, un cuadrado, etc.— no constituye un hecho primero, sino un caso particular en el cual los mecanismos perceptuales culminan en relaciones adecuadas al objeto por las relaciones objetivas privilegiadas que se encuentran en juego en estas figuras: la igualdad de los rayos del círculo, la de los lados del cuadrado o la de los ángulos rectos, etc., presentan una ocasión para la aparición de descentraciones o compensaciones completas; en cambio en la percepción de un rectángulo o una elipse, se puede subestimar el ancho respecto del largo, etcétera.

Sin embargo, queda aún el problema de comprender cómo a pesar de sus deformaciones y del ilogicismo de sus composiciones la percepción consigue aprehender formas bien estructuradas. Ahora bien, en lo que concierne a este punto, el análisis genético pone de manifiesto una clara dualidad que escapa a la observación cuando sólo se experimenta con adultos. Cuando se comparan las percepciones específicas con las diferentes

[29] Véase *La psychologie de l'intelligence*. A. Colin, págs. 83-86.

edades sucesivas, se comprueba que existen algunos efectos que simplemente evolucionan en el sentido de una atenuación progresiva con el desarrollo, mientras que otros se refuerzan constantemente o incluso se constituyen en el camino, en oposición cualitativa con los precedentes.

Los factores cuya importancia disminuye con la edad son precisamente aquellos que acabamos de relacionar con las centraciones simples o relativas. Las deformaciones resultantes de la centración son en principio las mismas para todas las edades, pero se atenúan con el desarrollo, como si la descentración adquiriera más importancia. Ello equivale a decir (puesto que los efectos de centración se traducen en forma de transformación no compensadas) que las compensaciones resultantes de las descentraciones aumentan con la edad, y que la percepción se halla algo comprometida en la dirección de la reversibilidad operatoria.

Sin embargo, y en oposición con los factores primarios de centración, hay muchos efectos cuya importancia aumenta con la edad y que son característicos de una actividad propiamente dicha, en oposición con el carácter receptivo de la percepción inicial. Por otra parte, el término receptivo debe entenderse en un sentido relativo puesto que la centración (visual, táctil, etc.) ya es de por sí una acción, resultante de la exploración, e implica la elección de los puntos que permiten abarcar la mayor cantidad de posibles relaciones a la vez. Pero si bien es ya activa, lo es menos que las actividades perceptuales que comienzan con la centración y que consisten en análisis, transportes (espaciales o temporales), comparaciones (dobles transportes que aplican a cada uno de los dos términos que se comparan los caracteres percibidos sobre el otro), transposiciones (= transportes de relaciones), anticipaciones, etc., es decir, actividades sensoriomotrices que pueden integrarse cada vez más en los mecanismos de la inteligencia. Ahora bien, estas acciones propiamente dichas de la percepción son las que constituyen la actividad combinatoria de orden perceptual que conduce a las composiciones de formas, es decir, a las estructuraciones de las relaciones en conjuntos más o menos coherentes.[30]

En resumen, además de cada percepción actual, es necesario distinguir la acción de las percepciones sucesivas unas sobre las otras: reunimos a este conjunto de acciones bajo la denominación de "actividad perceptual". Si aplicamos ahora a la construcción del espacio perceptual esta distinción entre la percepción, como relativamente receptiva, y la actividad perceptual resulta claro que la estructuración progresiva del espacio en oposición a las relaciones elementales presentes desde la centración inmediata es la resultante de la actividad perceptual. En efecto, si distinguimos, en el espacio perceptual y en el espacio operatorio, las relaciones de carácter topológico (continuo, proximidad y separación, envolvimientos con rela-

[30] Para más detalles acerca de esta "actividad perceptual" véase Piaget: *La psychologie de l'intelligence chez l'enfant*, cap. III; Piaget e Inhelder: *La représentation de l'espace chez l'enfant*, cap. I; Piaget y Lambercier: *Arch. de Psychol.*, XXX, 1944, pág. 139.

ciones de exterioridad, interioridad y frontera y, por último, orden lineal o cíclico), las relaciones proyectivas (perspectivas, etc.) y las relaciones cuclidianas (similitudes, distancias o longitudes, coordenadas y medición) aparece lo siguiente: 1º únicamente las relaciones topológicas más simples están presentes desde la centración perceptual, porque estas relaciones siguen siendo interiores a los elementos centrados y porque se las percibe de próximo en próximo en virtud de los factores más primitivos de la percepción ("proximidad" que genera la vecindad, etc.); 2º las relaciones proyectivas provienen, por el contrario, de una coordinación de puntos de vista sucesivos que suponen una actividad perceptual estrechamente vinculada con las acciones en general y con la motricidad del sujeto; 3º las relaciones euclidianas implican, por último, una coordinación de las figuras o los objetos, que presupone las actividades combinatorias de transportes, transposiciones, etc., vinculadas a su vez con las manipulaciones y los desplazamientos del sujeto.

Comenzando por el final, es fácil mostrar que las coordenadas perceptuales (horizontal y vertical) —que hemos visto ya, están lejos de estar presentes desde el comienzo— se construyen poco a poco hasta alrededor de los 8-9 años y dependen de toda una actividad de comparación y establecimiento de relaciones (entre los objetos considerados y los elementos de referencia) que va mucho más allá de la percepción simplemente receptiva. Toda percepción de un elemento cualquiera supone, es cierto y en todos los niveles, un sistema de referencia proporcionado por los otros objetos del "campo", aunque más no fuera por el "fondo" mismo. Sin embargo, de estos sistemas de referencia momentáneos a un sistema estable —que implique la permanencia de los ejes horizontales y verticales— existe una serie de etapas que se han de desarrollar y que corresponden precisamente a una actividad perceptual siempre más rica, que termina por integrarse a la inteligencia (véase el punto 5). Asimismo, la constancia de las magnitudes que constituye sin duda lo específico de las relaciones euclidianas de carácter perceptual, sólo se adquiere definitivamente alrededor de los 9-10 años, y supone desde el punto de partida una actividad perceptual caracterizada por ciertas regulaciones y descentraciones. Si los pequeños subestiman las magnitudes en profundidades, en cambio la mayor parte de los adultos las sobreestiman por un mecanismo de supercompensación. Esta es, en efecto, una prueba de que aquí interviene una actividad reguladora, en oposición con la pasividad relativa de la percepción pura. La constancia de las formas, como por otra parte la constancia de las magnitudes, se elabora en sus formas más borrosas durante el primer año, en función de la construcción del esquema de los objetos permanentes, es decir, de la inteligencia sensoriomotriz en su totalidad, cuya actividad perceptual sólo constituye un caso particular.

En cuanto a las relaciones proyectivas construidas por la percepción, resulta claro que también dependen de una actividad perceptual compleja, puesto que son solidarias de las precedentes: tanto la estimación de las magnitudes con la distancia —a pesar de la visión proyectiva que disminuye

las proporciones— como las formas en el interior de deformaciones de perspectivas variadas suponen, en efecto, una estructuración a la vez euclidiana y proyectiva, que se vincula con el conjunto de las acciones del sujeto (desplazamientos y manipulaciones), es decir tanto a su inteligencia sensoriomotriz como a su actividad perceptual.

En consecuencia, únicamente algunas relaciones topológicas elementales están presentes en la percepción inmediata, independientemente de una actividad más compleja. La "vecindad" corresponde así a la "proximidad", uno de los factores más primitivos de la percepción; la "separación" corresponde a las distinciones sensoriales y el continuo a la ausencia de distinción de próximo en próximo ($A = B$; $B = C$ pero $A < C$). Ello no equivale a decir, sin embargo, que estas relaciones espaciales esenciales estén dadas independientemente de toda actividad, es decir que las percepciones más receptivas que las generan sean absolutamente pasivas: sólo lo son relativamente a las actividades más profundas que generan las relaciones proyectivas y euclidianas. Las proximidades, distinciones y continuidades que fundan las relaciones espaciales fundamentales dependen, en efecto, de estas acciones iniciales que son las centraciones de la mirada, el tacto, etc., y, en consecuencia, de la escala de los fenómenos relativos a los órganos sensoriales. Las relaciones espaciales más primitivas constituyen pues el testimonio de una interacción indisociable entre el sujeto y los objetos y no una recepción pura del sujeto respecto de los objetos.

Ello nos conduce a la epistemología de la percepción en general. Si consideramos las relaciones entre la percepción en su aspecto más receptivo y la actividad perceptual en su aspecto sensoriomotor, estamos obligados a concluir que la percepción no constituye en absoluto un conocimiento que se baste a sí mismo. Por otra parte, deben distinguirse dos casos: la percepción de objetos llamados "significativos" (en el vocabulario guestaltista) —es decir de significación extrínseca y por lo tanto relativa a una acción cualquiera (por ejemplo un martillo o un bastón)— y la percepción de las figuras o las formas con significación intrínseca, es decir que no superan el dominio de las relaciones simplemente espaciales.

En el primer caso, resulta claro que la percepción no supera el nivel de un simple índice: el conocimiento del martillo o el bastón no está presente en la simple figura perceptual o sensible de estos objetos, sino en la acción que los utiliza de una y otra manera, y la percepción sólo cumple la función de un índice de estas acciones. El elemento perceptual desempeña entonces, respecto de la acción, el mismo papel que la imagen respecto del concepto, es decir, el de un significante en relación a su significado (a su significación). Pero, en el caso de la imagen, el significante se diferencia como tal y constituye así un símbolo, mientras que en el caso de la percepción, el elemento perceptual está menos diferenciado del elemento motor y pertenece al mismo esquema de objeto perceptual y utilizable: la percepción sólo es un índice, no un símbolo; y este índice se ha de definir precisamente como un significante relativamente indiferenciado porque corresponde a un simple aspecto del objeto significado y constituye sin más una parte del esquema de este objeto.

Ahora bien, en el caso de las "formas" con significación intrínseca y ya no extrínseca, sucede exactamente lo mismo que ya habían observado Ampère y Helmholtz (véase el punto 3), cuando consideraban la sensación como un "signo", sin quizás extraer todas las consecuencias que esta afirmación implicaba. La única diferencia es que la acción significativa ya no es una acción cualquiera de utilización, sino una actividad perceptual o sensoriomotriz. Pero si se admite lo dicho anteriormente en cuanto a las diferencias entre la percepción simple, vinculada con cada centración, y la actividad perceptual que consiste en descentraciones, transportes, comparaciones, transposiciones y anticipaciones, es claro que esta actividad consiste esencialmente en asegurar el pasaje de las percepciones de unas a otras; dicho de otro modo, en establecer las semejanzas y las diferencias entre las relaciones sucesivamente percibidas. Por lo tanto, culmina en algo distinto a la simple percepción: a la constitución de "esquemas perceptuales" que ya son esquemas de transformación y no solamente lecturas de relaciones estáticas. Ahora bien, es evidente que estos esquemas vuelven a actuar sobre la percepción misma, en el sentido de que toda percepción que supere el contacto más primitivo con el objeto [31] implica relaciones virtuales que completan las relaciones actuales o reales: la percepción habitual es pues una percepción de esquemas y no solamente de objetos y estos esquemas constituyen precisamente el conjunto de las relaciones virtuales que la actividad perceptual podría encontrar nuevamente en el objeto percibido o actualizar en su contacto con él. Se comprende entonces en qué sentido la percepción constituye esencialmente un índice: es el significante de un esquema perceptual y éste constituye la significación del objeto percibido, y se trata además de una significación que desborda los elementos sensoriales puesto que se conecta con las relaciones virtuales que podría construir la actividad perceptual respecto de la percepción considerada.

Por ejemplo, al percibir un cubo en perspectiva (y sólo se lo puede percibir en perspectiva), no necesitamos para "ver" la igualdad de las caras, la de las aristas rectilíneas o la de los ángulos, "transportarlos" respectivamente unos sobre los otros, o "transponer" su igualdad par por par, ni siquiera desplazar el cubo (o desplazarnos nosotros en torno a él para centrar cada cara en forma sucesiva), etc. La percepción directa del cubo proporciona de entrada el conjunto de las relaciones virtuales que podrían actualizarse detallando el objeto a través de sucesivas fijaciones: por lo tanto, constituye un índice que evoca (del mismo modo que la parte evoca el todo, puesto que el índice es un aspecto de su propio significado) el esquema del cubo, y este esquema no es sino el conjunto de las posibles percepciones respecto de este cubo, es decir, de las relaciones de igualdad, etc., que pueden percibirse sucesivamente. Ahora bien, este esquema

[31] Y además el contacto sensorial primitivo se halla vinculado de entrada con los reflejos, es decir, nuevamente con la motricidad (véase V. Weizsecker: *Der Gestalkreis*, 1941).

es independiente del lenguaje, la imagen y la representación propiamente dicha: se construye en función de la sola actividad perceptual y constituye sin más la totalidad de los posibles descentraciones, transportes, transposiciones, reconocimientos, etc. Por ello, este esquema se transforma en función del desarrollo mental, en oposición con las percepciones simples, es decir, con aquellas presentes en su forma actual en cada centración.

Este carácter de índice de la percepción respecto del esquema perceptual es tanto más evidente en la medida en que la percepción como tal consiste —como lo hemos visto— en un simple sorteo al azar, en el cual de todos los posibles puntos sólo se fijan algunos en oposición a todos aquellos que darían lugar a relaciones diferentes. Desde el punto de vista epistemológico, la percepción está lejos de ser una copia fotográfica de los objetos como pensaban los empiristas; permanece incluso bastante alejada de esa "forma" común a las realidades físicas, fisiológicas y psicológicas en las que piensa la fenomenología guestaltista: sólo es un punto de referencia respecto de la acción real de vincular las formas percibidas entre sí, es decir, respecto de la actividad perceptual. En cuanto a esta actividad, el solo hecho de que proceda por esquemas muestra bastante bien que se trata de una asimilación (de los objetos a estos esquemas) así como de una acomodación, como cualquier otra acción: por otra parte, los esquemas perceptuales sólo constituyen casos particulares de los esquemas de asimilación sensoriomotriz, que volveremos a analizar en el punto 5 y suponen —como ellos— una interacción entre el sujeto y el objeto y no una simple copia del objeto por parte del sujeto.

En resumen, desde el punto de vista epistemológico, la percepción constituye un sistema de índices obtenidos por un sorteo al azar que se refiere a relaciones construidas gracias a una actividad sensoriomotriz que vincula estos índices atribuyéndoles significaciones ya esquemáticas. Por lo tanto, lo esencial es la motricidad en la toma de contacto con lo real, el elemento sensorial no es sino el significante respecto de las significaciones activas y motrices, es decir, el índice estático de las transformaciones —reales o posibles— aseguradas por la actividad sensoriomotriz.

Se comprende entonces la verdadera significación del espacio perceptual, respecto del cual el sentido común es víctima de tantas ilusiones, a veces compartidas por ciertos matemáticos: lejos de ser más real que el espacio intelectual, el espacio sensible sólo se apoya en índices de la realidad y no en su expresión inmediata, y estos índices no se traducen en conocimientos —incluso en conocimientos simplemente perceptuales— salvo por intermedio de una actividad sensoriomotriz que supere de entrada lo sensible y recurra a la motricidad, es decir que se comprometa en una dirección que precisamente es la de la inteligencia misma.

En efecto, y sin duda en ello consiste la lección más importante que implica el examen del espacio perceptual, este espacio se construye de modo análogo al espacio intelectual mismo: con dos diferencias sin embargo, y ambas tienen que ver con el hecho de que la percepción es el conocimiento del objeto presente y de que la inteligencia funciona a distancias espacio-

temporales variadas entre el sujeto y los objetos. La primera diferencia es que el índice sensible y la significación motriz corresponden —de modo más indiferenciado entre sí en el plano perceptual que en el intelectual— a lo que serán, a niveles más elevados, la imagen espacial intuitiva que sirve de símbolo concreto al razonamiento y las relaciones conceptuales que prolongan las relaciones motrices. La segunda es que el espacio perceptual es esencialmente incompleto y deformado, en oposición al espacio intelectual siempre más completo y resultante de un conocimiento cada vez menos deformante.

El espacio perceptual es esencialmente incompleto y deformado (es decir, como se ha observado frecuentemente, heterogéneo, no isótropo, vinculado con falsos absolutos en vez de ser relativo, etc.) por la sencilla razón de que nunca se basta a sí mismo. Ante un objeto o un cuadro complejos, la percepción se fija en un punto y luego en un segundo, un tercero, etc. Ahora bien, cada una de estas centraciones constituye, por una parte, una fragmentación de lo real y, por la otra, una deformación de él en función de las leyes estadísticas inherentes al mecanismo de las centraciones relativas. Y hay algo más: para relacionar entre sí estas diversas centraciones, es indispensable superar las percepciones, puesto que no son simultáneas, sino sucesivas, y porque la acción de las percepciones entre sí en el tiempo ya no corresponde a la percepción simple y supone una actividad de establecimiento de relaciones. La existencia de una actividad perceptual marca pues, de por sí, la obligación que tienen las percepciones de superarse como tales para vincularse entre sí. Sin embargo, la actividad perceptual es breve e insuficiente, porque carece de un simbolismo diferenciado y de un mecanismo propiamente operatorio. Es cierto que se compromete en la dirección en la que se constituirán la intuición representativa y la inteligencia operatoria. Desde el plano sensoriomotor, se integra a una inteligencia práctica o sensoriomotriz que pasaremos a analizar inmediatamente. Luego, cuando se completa el sistema de acciones —con el espacio más extenso y ágil que lo caracteriza (su expresión más característica es el "grupo" práctico de los desplazamientos)— con la aparición del poder representativo, el espacio perceptual se integrará finalmente en un espacio intelectual, que no se habrá de superponer a él como lo hace una imagen de lo real a la realidad, sino como un organismo acabado sucede a la organización embrionaria que lo prepara pero que aún no lo iguala.

5. El espacio sensoriomotor. Las interpretaciones de H. Poincaré acerca del carácter "a priori" del concepto de grupo y la propiedad convencional del espacio euclidiano de tres dimensiones. Entre el espacio perceptual —del que acabamos de analizar por qué no es suficiente de por sí— y el espacio representativo que culminará en una organización propiamente operatoria, se inserta una forma de espacio más general que las estructuras perceptuales —que sólo constituyen un caso particular—: se trata del espacio sensoriomotor, esencialmente constituido por las manipulaciones y los desplazamientos del sujeto mismo. Estas acciones elementales, cuya organización se remonta a los dos primeros años

de vida, están orientadas por las percepciones, pero proporcionan un conocimiento práctico acerca del espacio que las supera y que forma la subestructura de las futuras operaciones.

Ya hemos comprobado (en el punto 3) cómo la construcción de las constancias perceptuales de la magnitud y la forma suponía la elaboración de un esquema de acción que supera la percepción, el de los objetos permanentes, susceptible de encontrarse nuevamente fuera del campo perceptual actual y que conserva, en el interior de este campo, sus propias dimensiones y formas. Ahora bien, el objeto permanente, que proporciona el primer ejemplo de estos "sólidos invariables" cuya importancia percibieran todos los geómetras en cuanto a la formación de nuestra geometría, constituye el producto más auténtico de una inteligencia sensoriomotriz, anterior al lenguaje y a las representaciones, estudiado en los monos antropoides y el bebé.[32] Por otra parte, es claro que la actividad perceptual, que —como acabamos de mostrar— es la fuente de las construcciones de la percepción, desborda los marcos de la percepción y corresponde a la inteligencia sensoriomotriz que orienta tanto a los movimientos como a las percepciones y regula así la actividad en su totalidad, antes del desarrollo de la inteligencia representativa, para luego conservarse en el plano especializado de la vida perceptual y motriz del niño mayor y el adulto.

Si el espacio perceptual es de por sí esencialmente incompleto, porque es inmanente a cada campo sucesivo de percepciones, sin coordinación general entre estos campos, la inteligencia sensoriomotriz tiene pues como función vincular entre sí estos sucesivos campos, no aún a través de una representación de conjunto (que sólo comenzará con la aparición de la función simbólica), sino a través de un mecanismo motor que regula el pasaje de un campo a otro y asegura la continuidad de la acción. En la medida en que los esquemas perceptuales (entre los cuales ninguno constituye de por sí un espacio de conjunto, un medio común para todos los fenómenos percibidos) están vinculados, en efecto, por los desplazamientos del sujeto, es decir que están completados por los esquemas sensoriomotores que abarcan no sólo los movimientos de los órganos de la percepción (movimientos del ojo y la cabeza, o la mano y el brazo, etc.), sino los de la totalidad del propio cuerpo respecto de los objetos percibidos, se constituye entonces un espacio práctico más general que se apoya en el conjunto de los esquemas sensoriomotores y perceptuales del sujeto. Por cierto, existe la misma continuidad entre este espacio sensoriomotor y el espacio de los esquemas perceptuales, que entre estos últimos y la percepción como tal, pero el espacio sensoriomotor no por ello deja de ser una realidad de conjunto, cuyo equilibrio final sigue siendo inexplicable por las solas leyes de la percepción e incluso de la actividad perceptual.

[32] Véase Koehler: *L'intelligence des singes supérieurs*. Trad. Guillaume. Alcan y Piaget: *La naissance de l'intelligence chez l'enfant*. Delachaux et Niestlé. [Hay versión castellana: *El nacimiento de la inteligencia en el niño*. Madrid. Aguilar, 1965.]

Ahora bien, la lección epistemológica que implica la necesidad de este sistema de esquemas sensoriomotores para coordinar el espacio en un solo todo —aunque se trate de una totalidad de acciones sucesivas y no de representaciones simultáneas— es que el espacio, en tanto medio común a los objetos de acción y percepción, no se percibe en sí mismo: integra las percepciones en un sistema que ellas solas no pueden construir, y no corresponde a una percepción propiamente dicha. Es una "forma" de la conducta y no de la sensibilidad. El gran mérito de H. Poincaré radica en haber mostrado de antemano lo que la psicología genética está entonces en condiciones de verificar: ni los sentidos, ni la experiencia son suficientes para constituir un espacio sin la existencia de un esquema que los oriente, permitiéndoles elegir entre diversas interpretaciones posibles (y esta elección no es impuesta de una vez por todas por los datos percibidos o experimentados).

¿En qué consiste este esquema? Conviene distinguir aquí, dentro del conjunto de concepciones tan profundas y decisivas como las de Poincaré, aquello que sigue siendo esencial e incontestable, una vez traducido en términos de génesis real de la conducta o el espíritu, y aquello que es solidario de una psicología superada por los estudios ulteriores, o de un convencionalismo refutado por los progresos de la física. Por otra parte, nada hay más ágil, matizado y rico en implicaciones, a menudo difíciles de analizar, que las sucesivas exposiciones de Poincaré acerca del espacio, y las múltiples correcciones que constantemente ha introducido muestran bastante bien que no puede encerrarse su filosofía geométrica en las fórmulas definitivas de un nominalismo pragmatista, como se hizo a veces.[33] Resulta claro, en particular, que existe cierto paralelismo entre sus ideas acerca del número, o el razonamiento matemático en general, y sus ideas de carácter propiamente geométrico. En ambos casos, se ubicó en una posición compleja, uno de cuyos polos no está lejos del apriorismo y el otro sólo se orienta en parte hacia el convencionalismo. Para Poincaré, "el concepto general de grupo preexiste en nuestra mente, al menos en potencia" (*Science et Hypoth.*, pág. 90). Esta afirmación corresponde sin duda, en el terreno geométrico, a sus hipótesis aritmológicas acerca de la intuición racional del "número puro" (vol. I, cap. I, punto 5): es aun más claramente así en la medida en que —como sabemos— el conjunto de los números enteros positivos y negativos constituye un grupo cuyo elemento es la operación + 1. Existe pues un estrecho vínculo entre el razonamiento por recurrencia, fundado en esta intuición a priori (en el cual Poincaré localizaba el razonamiento matemático por excelencia) y el papel que el célebre geómetra atribuía a la idea de grupo en la estructuración espacial progresiva. Sin embargo, en ambos casos —del número y el espacio—, se otorga igualmente a la intuición —cuyas raíces se hundirían en marcos preformados— el poder de prolongarse en combinaciones operatorias siempre más libres: es en esta otra dirección que se manifiesta el convencio-

[33] L. Roupier: *La philosophie géométrique de Henri Poincaré*. Alcan, 1920; y Ph. Frank: *La Causalité*. Flammarion.

nalismo de Poincaré (más a menudo mencionado a propósito de su filosofía geométrica), aunque apoyado en el mismo apriorismo que en su teoría acerca del número.

Ahora bien, tanto en sus hipótesis acerca del innatismo del concepto de grupo como en la construcción del esquema euclidiano de tres dimensiones, Poincaré recurre siempre, al fin de cuentas, al análisis del espacio sensoriomotor en el desarrollo de sus concepciones. Es, por lo tanto, en este terreno —cuya importancia Poincaré tuvo el mérito de percibir a fines del siglo último— en oposición al campo demasiado estrecho de la percepción pura —terreno en el que se habían peleado los innatistas y los empiristas durante casi todo el siglo XIX— donde hay que discutir el problema de la significación epistemológica de la idea de "grupo", así como la del papel de la experiencia o la convención en la elaboración del espacio euclidiano.

En efecto, Poincaré hace remontar el descubrimiento mental del espacio, no a la percepción de la extensión o las formas, sino a la organización sensoriomotriz de los desplazamientos. A todo cambio producido en el medio externo puede corresponder una preacción del sujeto que tiende a volver a colocar o a encontrar las cosas tal como estaban en la situación anterior a esta modificación. Ahora bien, existe un conjunto de cambios que pueden corregirse por un simple desplazamiento del propio cuerpo: así un móvil que sale lateralmente del campo visual puede volver a encontrarse como antes con una simple rotación de la cabeza, y un móvil que cambia de dimensiones aparentes a medida que se aleja recupera su magnitud cuando uno se acerca nuevamente a él. Estos cambios constituyen los "cambios de posición". Por el contrario, hay transformaciones que no pueden anularse por un movimiento correlativo del propio cuerpo: así la combustión de un pedazo de madera o la disolución del azúcar en el agua. Se trata entonces de los "cambios de estado". Poincaré hace remontar el origen de la construcción del espacio a esta distinción considerada como una suerte de hecho primero: el espacio, como sistema de cambios de posición, será la resultante de las conductas sensoriomotrices más elementales. Ahora bien, a pesar de las dificultades psicológicas que esta tesis implica como veremos más adelante y a despecho de su simplicidad, presenta el gran interés de colocar de entrada el problema en el plano de la acción o el movimiento, y ya no en el de la percepción. "Para un ser completamente inmóvil, dice con vigor Poincaré, no habría ni espacio, ni geometría" (*Val. Sc.*, página 82).

Hay algo más. ¿Cómo consigue el sujeto organizar sus movimientos de tal modo que logre corregir los de los objetos? Independientemente de la forma un poco limitada en la que Poincaré se representa el papel de la motricidad en el conocimiento, introduce aquí una hipótesis fundamental: estos desplazamientos del propio cuerpo forman un "grupo". En efecto, dos "desplazamientos del cuerpo en bloque" pueden coordinarse en uno solo; cada uno de ellos puede anularse por un desplazamiento inverso; el producto entre un de[illegible] y su inversa es un desplazamiento nulo y estos desplazamientos son asociativos. ¿De dónde proviene entonces

este concepto de grupo? Seguramente no de la experiencia externa, puesto que para descubrir que los movimientos de los sólidos constituyen un grupo precisamente hay que coordinar los movimientos propios en este tipo de estructura: distinguiremos los cambios de posición de los cambios de estado a través de la correlación de estas dos clases de desplazamientos. El mismo razonamiento sería válido en contra de una interpretación basada en la experiencia interna, puesto que los elementos del grupo en cuestión son justamente los "desplazamientos del cuerpo en bloque", es decir, los que se reconocen por el hecho de que son correlatos de los movimientos de los cuerpos externos. El grupo de los desplazamientos —al que Poincaré hace remontar la organización del espacio— debe considerarse como una especie de ley o de marco de nuestra propia actividad, "preexistente al menos en potencia" según la fórmula mencionada más arriba. En una palabra, para poder seguir los movimientos del mundo externo, el sujeto debe en efecto coordinar sus movimientos, y esta coordinación es la que implica la estructura de "grupo".

Admitido esto, surgen entonces tres consecuencias fundamentales: el grupo de los desplazamientos del propio cuerpo genera la estructuración de los movimientos externos según un modelo correlativo a través de una mezcla de convenciones y utilización de la experiencia y luego permite, según el mismo proceso, la atribución a este espacio externo de tres dimensiones y de una estructura euclidiana.

Resulta claro que el grupo de los movimientos propios genera la construcción del grupo de los desplazamientos del objeto puesto que las dos estructuras se organizan al mismo tiempo. Sin embargo, a partir de la distinción entre los cambios de posición y los cambios de estado, y a partir de la estructuración del grupo constituido por los primeros de estos cambios externos, interviene —según Poincaré— esa mezcla de formas "preexistentes" —de convención y experiencia— cuya unión es la nota característica de su tan sutil doctrina. El papel de la experiencia se manifiesta por la presencia, descubierta en la naturaleza, de estos "notables cuerpos" llamados sólidos y que pueden desplazarse por traslaciones, rotaciones, etc., conservando sus formas y dimensiones. Sin embargo, esta comprobación experimental no es pura. En efecto, no existe en lo real desplazamiento alguno carente de deformación, tal como sucedería para un sólido euclidiano ideal: el calor o el peso pueden alterar el móvil y convenimos entonces, según una primera disociación convencional, en considerar separadamente los puros desplazamientos que constituyen un grupo y las alteraciones físicas del objeto. Sin embargo, esta convención es posible porque —como acabamos de ver— poseemos el poder preestablecido de construir la idea de grupo.

Viene luego la estructuración de este espacio real en tres dimensiones. Sabemos hasta qué punto Poincaré insistía en este problema y cómo modificó constantemente su exposición, tan delicada es la delimitación que intentó realizar entre los papeles respectivos de la experiencia, la convención y, en este punto particular, de las dos clases de ideas preexistentes: el papel de nuestros órganos hereditarios y las intuiciones a priori de nuestro

espíritu. Se introduce la idea de dimensión en primer lugar a través de la consideración topológica del continuo y los cortes: un continuo sólo tiene una dimensión si está dividido por cortes que son discontinuos (por ejemplo una línea, cortada por puntos), hay dos dimensiones si se lo puede cortar mediante un continuo de una dimensión (por ejemplo, una superficie cortada por una línea), etc. Admitido este punto, ¿cuántas dimensiones tiene el espacio de nuestras actividades prácticas? En primer lugar, es necesario observar que el continuo perceptual o físico es contradictorio (véase en el punto 4 la fórmula de la ley de Weber: $A = B$; $B = C$ pero $A < C$) y que, para resolver la contradicción, los matemáticos la reemplazan por una escala que implica una infinidad no conmensurable de gradaciones. Sin embargo, este continuo matemático es irrepresentable: "sólo podemos representarnos continuos físicos y objetos finitos" (*Val. Sc.*, pág. 98). Por otra parte, "el espacio absoluto carece de sentido y hay que comenzar por relacionarlo con un sistema de ejes invariablemente referidos a nuestro cuerpo" (*Ibíd.*, pág. 99). Localizar un objeto equivale pues a "representarse los movimientos que habría que hacer para alcanzarlo" (pág. 80), ya que "la única cosa que conocíamos directamente es la posición relativa de los objetos respecto de nuestro cuerpo" (*Ibíd.*, pág. 79). A partir de entonces, para determinar la cantidad de dimensiones del espacio que caracteriza a los objetos que nos rodean, cabe pensar que es suficiente leer los datos de la experiencia física y analizar nuestros procedimientos de localización visual, táctil, etc., y nuestros propios desplazamientos, aplicando a cada uno de estos casos el criterio topológico mencionado hace un instante y que sirve para determinar la cantidad de dimensiones. Pero se observan entonces dos tipos de circunstancias esenciales: ni nuestros órganos, ni la experiencia nos imponen una respuesta decisiva. Por ejemplo, si no siempre concordaran nuestras sensaciones de convergencia y acomodación entonces el espacio visual tendría cuatro dimensiones. En cuanto a la experiencia sólo proporciona indicaciones y se acomodaría muy bien a otros modelos que aquellos que hemos aplicado. En resumen, el espíritu construye el continuo matemático de tres dimensiones "pero no lo construye a partir de la nada, requiere diversos materiales y modelos. Estos materiales y estos modelos preexisten en él. Pero no se le impone un solo modelo, hay una *elección*: puede elegir, por ejemplo, entre el espacio de tres y el espacio de cuatro dimensiones. ¿Cuál es entonces el papel de la experiencia? Proporciona las indicaciones según las cuales el espíritu realiza su elección" (*Val. Sc.*, pág. 132).

La estructura euclidiana del espacio práctico implica una explicación análoga. En primer lugar, el espacio sensoriomotor es de "carácter cuantitativo" por causa "del papel que desempeñan en su génesis las series de sensaciones musculares. Son series que pueden *repetirse*, y el número es la resultante de su repetición; porque puede repetirse indefinidamente el espacio es infinito" (*Ibíd.*, pág. 133). Esta repetición es, a la vez, fuente de la "relatividad esencial del espacio" (pág. 118) y de la métrica. Pero, ¿por qué es euclidiana nuestra métrica espontánea? Nuevamente aquí nuestro espíritu contiene varios modelos, equivalentes entre sí y tales que

puedan traducirse unos en otros puesto que las relaciones no euclidianas pueden expresarse mediante figuras euclidianas y recíprocamente. Sin embargo, nuevamente aquí, la experiencia, por una parte, y nuestros órganos, por la otra, tienen sus sugerencias que hacer: los desplazamientos de los sólidos naturales se componen del mismo modo que las sustituciones del grupo euclidiano y nuestras acciones más simples presentan la misma estructura. Elegimos entonces el modelo más cómodo y aplicamos a lo real el esquema euclidiano, pero nada nos impediría emplear otro lenguaje.

Vemos pues cómo desde la elaboración del espacio sensoriomotor interviene —según Poincaré— la serie de las elecciones y las situaciones favorables que luego invoca como necesarios para justificar su convencionalismo, cuando, en otra parte, la organización sensoriomotriz del grupo de los desplazamientos testimonia la intervención, ya a partir de este nivel elemental, de las ideas preformadas "preexistentes" a la vez en nuestros órganos y nuestro espíritu. La epistemología geométrica de Poincaré plantea tres problemas: el innatismo de la idea de grupo, la naturaleza de las convenciones prácticas, y las relaciones entre la actividad, —hereditaria o individual— del sujeto y la experiencia física.

Respecto del primer punto, los resultados del análisis psicogenético proporcionan una respuesta detallada. Al estudiar el espacio sensoriomotor durante todo el período que se extiende desde el nacimiento hasta la aparición de la representación (lenguaje e intuición imaginada), hemos podido confirmar el papel esencial que Poincaré atribuye a la estructura de grupo[34]: es perfectamente exacto que los desplazamientos del sujeto (no solamente los "desplazamientos del cuerpo en bloque" sino también los movimientos de manipulación, como las rotaciones o las sucesivas traslaciones imprimidas al objeto, etc.) terminan por adquirir una estructura de grupo. Por ejemplo, se puede observar que cerca de la mitad del segundo año de vida, el niño se desplazará de una pieza a otra de su departamento y de un punto al otro de su jardín coordinando sus sucesivos movimientos a través de un sistema de composiciones reversibles, o volverá a encontrar un objeto oculto componiendo, con la misma estructura, los desplazamientos anteriores de este objeto. Se percibe entonces que la noción de "grupo" no es en absoluto un modo de descripción artificial que el matemático empleará para analizar desde afuera la conducta del sujeto, sino que expresa realmente la forma de equilibrio alcanzada por sus desplazamientos, o por sus acciones sobre el objeto, una vez culminadas las coordinaciones sensoriomotrices. Así, la composición de dos desplazamientos en uno solo expresa la capacidad misma de la coordinación, la operación inversa expresa la conducta fundamental de la posibilidad del retorno, la asociatividad traduce esa otra conducta esencial que es la capa-

[34] Véase *La construction du réel chez l'enfant*. Delachaux et Niestlé, cap. II. [Hay versión castellana: *La construcción de lo real en el niño*. Buenos Aires, Proteo, 1966.]

cidad de recorrido (*détour*), y la operación idéntica traduce la conservación desde el punto de partida en el transcurso de la composición de ida y vuelta. En resumen, el grupo expresa la propiedad misma de las composiciones reversibles y asociativas que alcanza el sujeto una vez terminada la coordinación de sus desplazamientos.

Pero si bien Poincaré consiguió despejar muy profundamente la estructura más importante que se halla en la base de la constitución del espacio, tanto desde el punto de vista genético real como desde el punto de vista matemático abstracto, nos parece que se equivocó cuando localizó esta estructura de grupo en el punto de partida de las conductas sensoriomotrices; en realidad, sólo constituye su punto de llegada y la forma de equilibrio final. Por supuesto no se puede exigir a un matemático genial que encuentre el tiempo necesario para someter sus hipótesis psicológicas al control experimental; es así que Poincaré se limitó a reconstituir lógicamente, si así puede decirse (o introspectivamente, lo cual equivale a lo mismo), un desarrollo conjetural, en vez de describir el desarrollo real: por lo tanto, supuso la evidencia de la existencia de una distinción elemental entre los cambios de posición y los cambios de estado y luego construyó su teoría a partir de este dato hipotético. Ahora bien, las acciones del niño (y, en particular, del bebé) son siempre más ricas y más imprevistas que las reconstituciones genéticas abstractas. Por lo tanto sucede que el niño no distingue de entrada los cambios de posición y estado, sino que necesita unos cuantos meses, y casi un año, para lograr esta disociación. Es así por una razón fundamental desde el punto de vista geométrico y desde el punto de vista físico: su universo inicial no está formado por objetos permanentes y todo desplazamiento se le presenta en primer lugar como un cambio de estado. En efecto, es claro que el grupo de los desplazamientos es correlativo a la idea de objeto: no sólo porque el grupo euclidiano se traduce físicamente en el movimiento de los sólidos invariables, sino porque el objeto permanente —es decir, susceptible de volver a encontrarse— es lo único que puede garantizar el buen fundamento de la reversibilidad. La construcción del grupo de los desplazamientos es pues solidaria de la del objeto mismo, y sin objetos sólo puede haber coordinaciones egocéntricas y deformantes, es decir, sistemas de acciones irreversibles.

¿Cómo consigue el lactante construir a la vez el grupo práctico de los desplazamientos (de los suyos y de los objetos manipuleados) y el esquema sensoriomotor del objeto permanente, que puede encontrarse nuevamente "detrás" de las pantallas, "bajo" otros objetos, etc. (sin retornar a los esquemas perceptuales de la constancia de las formas y las dimensiones de este objeto)? Precisamente aquí se plantean todas las preguntas acerca del papel de los conceptos "preexistentes" eventuales, el papel de la experiencia, el de los elementos facilitadores o convenciones prácticas y de la intervención de las dos clases de abstracción distinguidas anteriormente: a partir del objeto, y a partir de la acción o de sus coordinaciones como tales.

Ahora bien, así como no hemos podido seguir a Poincaré en su hipó-

tesis acerca de una "intuición del número puro", porque los datos genéticos nos muestran la existencia de una construcción activa de las clases, las relaciones y los números, también nos resulta difícil admitir la preformación de la idea de grupo. "Esta idea preexiste, o más bien lo que preexiste en el espíritu, es la potencia de formar esta idea. La experiencia sólo constituye para nosotros una ocasión para ejercer esta potencia", afirma Poincaré.[35] Si sólo se trata de la potencia de formar la idea, calificarla de preexistente es decir demasiado, ya que entonces sólo podría corresponderle una necesidad terminal y no inicial (así como hemos señalado más atrás). Si en cambio se trata de oponer "preexistente" a empírico o experimental, ¿qué entendemos con ello? O bien se considera que la idea de grupo es a priori, lo cual contradice el solo hecho de su desarrollo genético, y este desarrollo está aún muy lejos de haber terminado alrededor de los 1-2 años, ya que, una vez adquiridas las composiciones reversibles en el plano de la acción práctica, será necesario reconstruirlas en el plano de las operaciones concretas (7-8 años) y formales (11-12 años); la reversibilidad es entonces el producto de una lenta evolución, de la cual sólo constituye el equilibrio final. O bien se entiende que la estructura de grupo no se obtiene a partir de la experiencia por una simple abstracción a partir del objeto, sino que se la descubre en el transcurso de las experiencias, es decir, de las acciones ejercidas sobre el objeto, pero por abstracción constructiva a partir de las coordinaciones de la acción.

Ahora bien, el análisis genético nos parece sugerir en efecto esta última solución, en completo paralelismo con lo que hemos visto a propósito de las clases, las relaciones y los números. Es necesario comprender que en el terreno de las conductas sensoriomotrices —y Poincaré percibió con mucha profundidad que implican una organización espacial que anunciaba, a través del papel de los movimientos, al espacio operatorio y propiamente intelectual—, el esquematismo del grupo se presenta en forma aún singularmente limitada, y que no va más allá del nivel de lo que son, en esta misma etapa, los esquemas puramente prácticos que ocupan el lugar de las clases, relaciones y cantidades numéricas. Poincaré percibe la cantidad e incluso "el número" en "las series de sensaciones musculares" provenientes de la repetición de un movimiento, en otros términos en la reiteración de las acciones. Desde el punto de vista psicológico tiene razón, pero resulta claro que esta cuantificación motriz es del mismo orden que, por ejemplo, la conducta, que ya puede adquirir por entrenamiento una gallina y que consiste en picotear únicamente los granos pares, o impares, de una hilera de veinte elementos separados entre sí: el "número" se vincula entonces con cierto ritmo motor. Ahora bien, este número sensoriomotor no contiene necesariamente, en el estado preformado, la serie ilimitada de los números enteros (aquí Poincaré exagera algo cuando habla de infinito a propósito de las sensaciones musculares), así como tampoco los esquemas sensoriomotores contienen de antemano la lógica de las clases o la de las

[35] *Revue de Métaph. et de Morale*, 1917, pág. 647.

relaciones. Sin embargo —como hemos insistido en señalarlo durante todo el capítulo 1—, las clases, las relaciones asimétricas y sus síntesis numéricas, se construyen progresivamente y en el transcurso de las acciones ejercidas sobre el objeto, pero no se extraen del objeto por abstracción de sus cualidades, sino que por el contrario son las resultantes de la coordinación de las acciones: por lo tanto, las clases, las relaciones y los números se elaboran por una abstracción a partir de las acciones coordinadas propias de las etapas anteriores, a través de una serie de construcciones propias de cada nueva etapa, y sucede así desde las coordinaciones orgánicas elementales hasta las coordinaciones operatorias más elevadas y más formales. Las clases, las relaciones y los números no están preformados y no tienen un origen empírico; son el producto de sucesivas coordinaciones, cuyos materiales provienen de las coordinaciones precedentes, pero que producen nuevas composiciones en el transcurso de las siguientes coordinaciones.

La construcción simultánea del esquema del objeto permanente y el "grupo" práctico de los desplazamientos es el resultado de un proceso exactamente semejante, y la situación de este grupo práctico respecto de las coordinaciones orgánicas anteriores o las coordinaciones operatorias ulteriores es exactamente la misma que la de las clases, las relaciones y los números. En efecto, por una parte, la coordinación de los movimientos propios no es suficiente de por sí —a pesar de lo que diga Poincaré— para constituir un "grupo", porque el sujeto construye, en su actuación sobre los objetos, a la vez la idea de objeto y los grupos complementarios de los desplazamientos del objeto y los propios desplazamientos: una larga sucesión de descentraciones a partir de la acción inmediata se hace necesaria para situar el propio cuerpo en un mundo de objetos y desplazamientos objetivos respecto de los cuales se agruparán los movimientos de este cuerpo. Sin embargo, por otra parte, este o estos grupos no provienen del objeto, a pesar de que la experiencia proporciona su confirmación: son abstraídos a partir de la coordinación de las acciones, a pesar de que estas coordinaciones se producen necesariamente en el transcurso de acciones aplicadas sobre lo real. Así, aunque el esquema del objeto permanente se aplique a los objetos físicos, es el resultado de la organización de los desplazamientos realizados por el sujeto; y aunque esta organización se aplique también a los movimientos físicos, constituye la forma de equilibrio de las coordinaciones cuyos materiales provienen de la propia acción. Entonces, el grupo práctico de los desplazamientos no está preformado por las coordinaciones orgánicas anteriores sino que constituye una nueva síntesis (o forma de equilibrio) de elementos extraídos de ellas por abstracción a partir de la acción[36]; y si bien no forma de antemano los grupos operatorios ulteriores, les proporciona los elementos que ellos reorganizarán en el plano de la representación y las operaciones conceptuales, tomándolos de este grupo sensoriomotor por una nueva abstracción a partir de la acción.

36 Véase para más detalles de esta evolución en: *La construction du réel chez l'enfant*. Delachaux et Niestlé, caps. I y II. Véase nota 34.

Todo ello nos conduce al problema de la "convención", ya que Poincaré hace intervenir, desde la construcción del grupo práctico de los desplazamientos, los elementos facilitadores que permiten disociar los cambios de posición de los cambios de estado y, en consecuencia, atribuir a los objetos en movimiento el esquema del desplazamiento de los "sólidos invariables", cuando en realidad, los móviles siempre varían en parte. ¿Qué es entonces esta "convención"? Se confunde precisamente con el proceso de asimilación de lo real a los esquemas de la acción. Actuar sobre el objeto es atribuirle nuevos caracteres. Sin embargo, Poincaré agrega que la elección de las convenciones siempre está dictada por la "comodidad". Ahora bien, es claro que una convención sólo resulta cómoda en la medida en que facilita el cumplimiento exitoso de la acción. Se puede traducir entonces la idea de convención cómoda por este otro concepto: la acción eficaz. El desplazamiento de los sólidos invariables es, por ejemplo, un esquema al que asimilamos los movimientos reales, esquema extraído de la coordinación de las acciones ejercidas sobre estos sólidos y no directamente de ellos mismos; este esquema se aplica a los objetos y los enriquece con nuevos caracteres; entre ellos el más notable es la reversibilidad: si se quiere se puede calificar este aporte del sujeto al objeto como una convención cómoda, pero en primer lugar es la manifestación de una acción exitosa. En su punto de partida, la "convención" se reduce en resumen a la abstracción a partir de la acción.

Sin embargo, el término convención adquiere nuevas significaciones cuando se aplica a las tres dimensiones del espacio práctico y, en particular, a su carácter euclidiano; carácter que Poincaré tiende a transformar en una simple forma de lenguaje, equivalente de derecho a los "lenguajes" no euclidianos, pero más "cómodo" que ellos.

En lo que se refiere a las tres dimensiones, es muy difícil, a pesar de la gran sutileza de Poincaré, negar el papel preponderante de la experiencia externa. Si pudiéramos transformar un guante izquierdo en un guante derecho, o sacar un objeto de una caja sin levantar su tapa y enhebrar un anillo cerrado en una varilla sin pasar la extremidad de ésta por la apertura interior del anillo, la experiencia nos impondría entonces la cuarta dimensión. En la práctica, el niño aprende que un objeto que está dentro de una caja no puede salir por sí solo de ella y que un anillo no puede pasar a través de una varilla rígida (hemos visto cómo un bebé intentaba enfilar un anillo en una varilla aplicándolo simplemente contra ella o niños de 4-6 años que pensaban que, de tres objetos atravesados en el orden ABC por un alambre, el objeto B podía ocupar la cabecera, o sea BAC o ACB, por una simple rotación del alambre).[37] Por lo tanto, parece evidente que, desde el punto de vista psicológico, la experiencia impone las tres dimensiones, pero no genera sin más el grupo de los desplazamientos. ¿En qué consiste esta coacción de la experiencia? Sólo se trata de una limitación: la coordinación de las acciones es la que genera las dimensiones, y esta coordinación puede conducir a 1, 2... *n* dimensiones. La experiencia

[37] Piaget: *Les notions de mouvement et de vitesse chez l'enfant*. PUF, cap. 1.

nos detiene en tres y en este terreno su poder se reduce a este papel limitativo. La eventual influencia de los órganos hereditarios pertenece también al mismo orden.

La cuestión del carácter euclidiano de nuestro espacio práctico y del grupo de los desplazamientos físicos es algo diferente, ya que interviene aquí una colaboración más estrecha de la experiencia y la acción. Vivimos en un medio macrocóspico cuya escala es intermedia a la escala microfísica y la escala astronómica, y nuestras acciones habituales se realizan sobre objetos que tienen poca velocidad en relación con la tierra tomada como punto de referencia inmóvil. Si existiera un "observador intra-atómico" —como lo ha supuesto L. de Broglie— o bien organismos con actividad interestelar, sus acciones tendrían velocidades semejantes a la de la luz. Podemos admitir que las coordinaciones comunes a todas estas diversas acciones bastan para generar una métrica general. Sin embargo, esta métrica se distinguirá, según los casos, en métricas euclidianas o no euclidianas. La escala de nuestra acción nos sugiere la métrica euclidiana, lo cual no significa que sea convencional sino, nuevamente, que es más adaptada y eficaz. La escala de la mecánica eisteiniana impone una métrica riemaniana que tampoco es la resultante de una convención; y podemos afirmar incluso que el convencionalismo de Poincaré fue el que, sin duda alguna, impidió que descubriera por su cuenta la teoría de la relatividad, a la cual se acercó sin embargo de muy cerca. Nuevamente aquí, la experiencia impone una elección, pero en vez de proceder por exclusión limitativa —como sucede con la cantidad de las dimensiones—, se trata más bien de una consideración de escala en relación a nuestra actividad corriente: esta actividad puede construir cualquier métrica, pero procede por aproximaciones sucesivas en función de las necesidades de la acción, y si bien la métrica euclidiana resultó suficiente para las actividades comprendidas entre la edad de la piedra tallada, o de las flechas con puntas de sílex, y la edad del automóvil, la era atómica necesitará quizás otras métricas.

Llegamos así al término de algunas observaciones genéticas que había que presentar a propósito del espacio perceptual y el espacio sensoriomotor. Para introducir al análisis del espacio representativo, comenzaremos por plantear el problema de la "intuición", tomando como base para la discusión el punto de vista de Hilbert.

6. El punto de vista de D. Hilbert y el problema de la "intuición" geométrica. Ya hemos mencionado de qué modo —tomando como guía el sentido común mismo— la mayor parte de los autores opusieron durante mucho tiempo a las operaciones lógico-aritméticas, concebidas como la expresión más auténtica de la actividad del espíritu, el conocimiento perceptual e intuitivo del espacio, considerado como vinculado a la experiencia o la "sensibilidad". Sin embargo, la reflexión acerca de las geometrías no euclidianas, en primer lugar, y, luego, la doble conquista que representan la geometrización de la gravitación resultante de la teoría de la relatividad y el descubrimiento del método axiomático, condujeron a

una escisión del espacio en dos realidades distintas: el espacio físico, indisociable de los "campos" energéticos y que constituye la expresión de su contextura, y el espacio intelectual, sistema de coordinaciones lógicas que puede compararse con cualquier otro sistema abstracto, por ejemplo el sistema de los seres numéricos o analíticos. Sin embargo, surgen entonces tres problemas: ¿cómo vincular el espacio físico y el espacio axiomático? ¿qué relaciones hay que establecer entre este espacio intelectual y el espacio perceptual o sensoriomotor? y por último ¿qué relaciones hay que determinar entre el espacio y las operaciones lógico-aritméticas?

A su manera H. Poincaré respondió a estas tres preguntas: el espacio deductivo o axiomático, así como las construcciones formales numéricas o analíticas, es una libre construcción "convencional" que se apoya, en su punto de partida, en la actividad práctica y sensoriomotriz para liberarse luego de ella; su concordancia con el espacio físico es la resultante de un ajuste progresivo entre las intuiciones de nuestro espíritu y los datos de la experiencia. Vuelve a establecerse así la unidad entre los espacios intelectual y sensible, así como la unidad entre ellos y el espacio físico. Además, el paralelismo entre las construcciones geométricas y las construcciones numéricas está asegurado puesto que el número también deriva de actividades elementales para desplegarse también en elaboraciones convencionales.

Ahora bien, sucede que uno de los matemáticos que más profundamente fundaron la geometría axiomática —David Hilbert— tomó también posición ante estos problemas pero de un modo sensiblemente diferente.[38] Por una curiosa inversión de los puntos de vista —respecto de los autores que oponían el espacio, dato intuitivo, al número y la lógica—, Hilbert concibe la geometría axiomática como una pura construcción lógica y que es además a priori, pero para arrojar a la geometría no axiomática en el terreno de la física. En otros términos, la disociación que Poincaré intentaba evitar es totalmente conservada por D. Hilbert.

La interacción entre el espíritu y lo real es, en primer lugar, reemplazada por una "armonía preestablecida". Así, lo real parece obedecer a las mismas leyes que la construcción axiomática. Aun en el terreno de la biología —en los estudios de Mendel— "los números encontrados de modo experimental verifican los axiomas euclidianos de la congruencia y los axiomas relativos al concepto geométrico «situado entre», la ley de la herencia parece ser así una aplicación de los axiomas de la congruencia lineal, es decir, de los teoremas elementales acerca del transporte de los segmentos".[39] Asimismo, para Hilbert los problemas de lo finito y lo infinito se plantean en términos análogos para el universo y para el pensamiento. La teoría de la relatividad muestra la adecuación entre la geometría riemaniana y la experiencia, etcétera.

¿De dónde proviene entonces esta "armonía preestablecida"? Porque "fuera de la experiencia y la deducción, existe una tercera fuente de

[38] D. Hilbert: "La connaissance de la nature et la logique". Trad. Müller. *Enseignement math.*, t. xxx, 1931.
[39] *Ibíd.*, pág. 24.

conocimientos": el apriorismo kantiano. "Concuerdo en que ciertos puntos de vista a priori son necesarios para la construcción de los conjuntos teóricos y se hallan en la base de todo conocimiento. Creo que los conocimientos matemáticos también se fundan, en última instancia, en estos puntos de vista intuitivos (*anschaulich*), que un cierto residuo intuitivo a priori es una base necesaria para la teoría de los números... Pienso que así ha sucedido esencialmente en mis investigaciones acerca de los principios de la matemática. El a priori no es ni más ni menos que una manera de ver fundamental, o la expresión de ciertas condiciones preliminares indispensables para el conocimiento y la experiencia." [40]

Sin embargo Hilbert no establece las mismas delimitaciones que Kant entre lo a priori y lo experimental: para él, Kant se equivocó cuando incluyó el espacio y el tiempo en las formas a priori. "La geometría sólo es, en efecto, esta parte de la física que describe las relaciones de posición de los cuerpos sólidos unos respecto de otros en el mundo de las cosas reales. La experiencia sólo nos asegura que hay cuerpos sólidos en movimiento; la proposición que afirma que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos y el axioma de las paralelas —tal como lo reconoció Gauss— tienen que verificarse o refutarse recurriendo a la experiencia." [41] "Podemos decir... que los puntos de vista de Gauss y Helmholtz respecto del carácter empírico de la geometría se han convertido en un resultado correcto de la ciencia. Hoy deben servir como punto de apoyo para toda especulación filosófica que se refiera al espacio y el tiempo." [42]

Vemos entonces cómo uno de los principales creadores de la axiomática geométrica adhiere al empirismo espacial de Gauss, pero apoya, en cambio el número y la lógica sobre un a priori que excluye el espacio. La axiomática geométrica se transforma, por una parte, en una pura lógica, mientras que, por la otra, el espacio intuitivo y práctico se vincula únicamente con la experiencia. Resulta entonces que el espacio axiomático se relaciona en efecto con las operaciones lógico-aritméticas, pero al precio de la eliminación del espacio real, arrojado en el terreno de la física, y se produce entonces la ruptura de todo contacto entre el espacio axiomático y el espacio perceptual, sensoriomotor o incluso intuitivo. Sin duda subsiste un vínculo entre el pensamiento y la naturaleza: "Sólo podemos comprender este acuerdo entre la naturaleza y el pensamiento, entre la experiencia y la teoría, considerando el elemento formal y el mecanismo que le corresponde, tanto del lado de la naturaleza como del lado de la inteligencia", [43] pero como este elemento formal se basa en un a priori, el vínculo es un vínculo "preestablecido" en forma de una "armonía" dada, y no es la resultante de nuestra actividad.

Los problemas cuya solución genética debemos buscar están claramente

[40] *Ibid.*, págs. 28-29.
[41] *Ibid.*, pág. 29.
[42] *Ibid.*, pág. 30.
[43] *Ibid.*, pág. 27.

planteados y la divergencia de las opiniones sostenidas por los matemáticos mismos muestra hasta qué punto los tres problemas de las relaciones entre el espacio intuitivo y el espacio intelectual, entre ambos y el espacio físico y entre ambos y las operaciones lógico-aritméticas, no provienen únicamente de la lógica o de su relación con las leyes de la física, sino que suponen un análisis preciso del desarrollo mental.

En este punto es importante volver a señalar dos observaciones previas, respecto de la intuición geométrica, e insistir en ellas con cierto vigor para no correr el riesgo de volver a caer en las dificultades irresolubles que pesan sobre la mayor parte de las discusiones acerca de las relaciones entre la axiomática y el espacio "intuitivo".

El primer punto que debe señalarse es que la idea de "intuición" espacial o geométrica, tal como la emplean los matemáticos (en particular, cuando la oponen a las ideas formales y axiomatizadas), no corresponde a nada que pueda definirse y recubre, por el contrario, un campo esencialmente heterogéneo, de modo tal que el empleo de la palabra "intuitivo" se vuelve frecuentemente contradictorio. Por otra parte, puede explicarse fácilmente esta situación: los matemáticos, que definen todo con precisión, consideran con razón que lo intuitivo es el dominio donde el rigor formal está ausente; sin embargo, a partir de esta suposición legítima, extraen la conclusión ilegítima de que el reino de la intuición constituye una entidad positiva, como si se pudiera delimitar, o incluso caracterizar, una realidad positiva con caracteres negativos. Surge una consecuencia grave: se cree decir algo cuando se oponen las ideas de intuitivo y axiomático, cuando en realidad esta dicotomía equivale simplemente a distinguir las ideas de axiomática y no axiomática, recubriendo esta segunda idea una serie de realidades genéticamente distintas y aun a menudo cualitativamente opuestas. Gonseth mismo, que sin embargo percibió la gradación de los niveles posibles que habrían de intercalarse entre las formas intuitivas inferiores del espacio y el esquema axiomático, define la intuición de un modo tan "somero" que constituye un débil socorro (véase el punto 11). Por lo tanto, es indispensable, si se quieren tratar las relaciones entre el espacio perceptual sensoriomotor y el espacio axiomático, contar con una clasificación y una seriación precisas de los estadios sucesivos del desarrollo real, histórico o genético. La ausencia de este marco de referencia de las estructuras psicológicas efectivas del espacio permite que Hilbert mantenga las antítesis que acabamos de examinar. La totalidad del problema de las relaciones entre el espacio concreto y la axiomática debe retomarse en términos de evolución. En este sentido distinguiremos tres etapas entre el espacio sensoriomotor y el espacio axiomático: 1º un espacio intuitivo en el sentido limitado, caracterizado por la representación imaginada y estática, que aparece al nivel preoperacional comprendido entre los 2 y 7 años y subsiste hasta la edad adulta: por ejemplo, en la representación de los puntos y las líneas como pequeñas superficies circulares o estrechas bandas; 2º el espacio de las operaciones concretas, susceptible de composiciones reversibles y coherentes, pero únicamente con los objetos manipuleables; esta forma de representación se refiere a las transformaciones

resultantes de la acción y aparece en el nivel mental comprendido entre los 7-8 y 11-12 años; 3º el espacio de las operaciones formales, que corresponde a una geometría que ya puede expresarse en proposiciones deductibles, pero cuyo contenido sigue siendo imaginado (es el espacio característico del nivel mental ulterior a los 11-12 años y que corresponde al modo de pensamiento utilizado en los *Elementos de Euclides*). Estos tres niveles distintos, reunidos en el espacio sensoriomotor, corresponden a lo que los matemáticos llaman el espacio "intuitivo" cuando oponen la "intuición" a la axiomática. En cambio, cuando se distingue simplemente la intuición de la deducción, se llama intuitivo a los dos primeros niveles, unidos al espacio sensoriomotor. Por nuestro lado, llamaremos intuición imaginada únicamente al primero de estos tres niveles y lo distinguiremos a la vez del espacio sensoriomotor (punto 5) y del espacio operatorio (niveles 2 y 3).

La segunda observación que no puede dejarse de lado, antes de iniciar cualquier análisis de la "intuición" geométrica, es que los mismos niveles genéticos llamados "intuitivos", comprendidos entre el espacio sensoriomotor y el espacio axiomático, corresponden a formas lógico-aritméticas sucesivas de intuiciones imaginadas, y luego de operaciones. Ahora bien, este punto es tan importante como el anterior. En efecto, considerar las diferentes formas de la "intuición" espacial como específicas del dominio geométrico es falsear completamente las perspectivas con las cuales se las aborda; se llega a oponer así una "intuición" del espacio, que en su esencia sería sensible o imaginada (salvo que se la convierta en "transintuitiva" cuando se consideran sus formas superiores y racionales), a la "intuición pura" del número o los mecanismos lógicos, que por el contrario sería de entrada intelectual y operatoria. En realidad, no hay mayor error psicológico que esta antítesis, que ha viciado casi toda la filosofía geométrica del siglo XIX. La observación un poco precisa del desarrollo mental proporciona por el contrario tres enseñanzas complementarias, y también significativas unas y otras en cuanto al análisis epistemológico del espacio:

1º Las operaciones concretas, que se intercalan entre la simple intuición imaginada y las operaciones formales (por lo tanto, las operaciones del segundo de los tres niveles distinguidos hace un instante) no son operaciones que se refieran a un espacio dado independientemente de ellas, sino operaciones que generan el espacio (en su forma conocida de intuición adulta). Todos admiten (salvo los platónicos) que las operaciones lógicas y numéricas no son operaciones que se refieren a seres lógicos —o a números— dados previamente, sino que constituyen la fuente misma de estos seres (clases o relaciones) y estos números. Por el contrario, cuando se trata de las operaciones espaciales —como las reuniones y particiones, los emplazamientos y desplazamientos, las mediciones, etc.— se razona como si estas operaciones se aplicasen a un espacio dado anteriormente a ellas: ahora bien, sólo se trata de una ilusión resultante del hecho de que como la constitución del espacio "intuitivo" adulto ha culminado, operamos sobre él como desde afuera; por el contrario, en el niño, las operaciones

son las que engendran el espacio "intuitivo" (en el sentido de los matemáticos), del mismo modo que las operaciones de clasificación engendran las clasificaciones lógicas y que la operación + 1 genera la sucesión de los números enteros.

2º Estas operaciones concretas, verdaderas raíces del espacio que los matemáticos llaman "intuitivo" son isomorfas, y tienen un desarrollo paralelo (con correspondencia sincrónica) a las operaciones lógico-aritméticas. Así, al encaje de las clases corresponde la partición, a la seriación corresponde el emplazamiento y el desplazamiento; y estas operaciones de partición y orden comienzan por ser cualitativas (en el sentido de intensivas) en el plano espacial y en el plano lógico. Por otra parte, así como la síntesis del encaje de las clases y la seriación genera el número, así la partición y el emplazamiento se fusionan en las operaciones de medición, etcétera.

3º Por último, en exacto paralelismo con la intuición espacial preoperatoria (nivel 1) existe una intuición prelógica y prenumérica antes que se constituyan las operaciones lógico-aritméticas. Lo que permite creer que las operaciones espaciales concretas se refieren a un espacio dado anteriormente a su constitución es la existencia de los espacios perceptuales, sensoriomotores y, en particular, de la intuición imaginada, generadora de ciertas figuras simples y estáticas (aún no susceptibles de transformaciones): las operaciones concretas se aplican, si se quiere, a estas formas perceptuales e imaginadas, pero esta "aplicación" consiste en realidad en transformarlas en nuevas estructuras que presentan nuevos caracteres, cualitativamente irreductibles a las anteriores. Ahora bien, sucede exactamente lo mismo con las operaciones lógico-aritméticas: están precedidas, en primer lugar (ya lo hemos visto), por los esquemas sensoriomotores que funcionan como conceptos prácticos o cantidades motrices, luego por verdaderas "intuiciones" preoperatorias, en el sentido mismo en que se habla de la intuición espacial imaginada. Sucede así que antes de saber construir números mediante la operación + 1 el niño procede por configuración de conjunto (véase cap. 1, punto 1), dando lugar a correspondencias biunívocas ópticas, pero no intelectuales, es decir, sin equivalencia durable una vez que se rompen los contactos visuales. Asimismo, antes de saber razonar sobre clases lógicas susceptibles de encajes y desencajes reversibles, intuye colecciones de objetos, sin lograr conservar las totalidades, pero otorgándoles relaciones intuitivas elementales (analogías, etc.). En resumen, todo el pensamiento prelógico y prenumérico es "intuitivo" en el plano lógico aritmético como en el plano espacial, antes de que las operaciones concretas se transformen en dos dominios a la vez. Ahora bien, así como las operaciones lógico-aritméticas no se limitan a una simple "aplicación" a estos datos intuitivos, sino que los reconstruyen totalmente y les imponen nuevas estructuras, así las operaciones espaciales concretas, que se constituyen alrededor de los 7-8 años, elaboran un nuevo espacio mediante datos perceptuales e intuitivos (imaginados) anteriores, y un espacio que el adulto interpreta enseguida erróneamente como la resultante de la per-

cepción misma; sucede así que la estructuración del espacio con ejes de coordenadas —verticales y horizontales— es la obra de las operaciones concretas y no lo es en absoluto de la sola percepción o de las solas intuiciones imaginadas, y sólo culmina alrededor de los 9-10 años. Estos sistemas operatorios de coordenadas naturales sólo se fusionan a posteriori con el espacio perceptual y no derivan en absoluto de él.

El análisis genético conduce pues a cuestionar la descripción propuesta por D. Hilbert acerca de las relaciones entre lo formal y lo intuitivo. En contra del apriorismo de Hilbert que establece una correspondencia entre lo formal y lo experimental a través de una armonía preestablecida, el estudio del desarrollo muestra todas las transiciones existentes entre el espacio intuitivo y el espacio formalizado: resulta entonces inútil recurrir a una preformación o una razón innata, para dar cuenta de lo formal, ya que el acuerdo entre las formas racionales y la experiencia se explica por el acuerdo entre las coordinaciones generales de la acción —fuente de la necesidad formal, que aparece al término de la composición que extrae sus materiales a partir de ellas— y las acciones particulares que constituyen la experiencia en tanto tal. Gonseth percibió claramente este pasaje gradual de lo intuitivo a lo formal pero, en vez de considerar en este caso a la "intuición" como un conjunto complejo de transiciones entre lo sensorio-motor y lo "teórico", este autor mantiene lo intuitivo en el mismo plano que lo experimental y lo formal. En una de sus últimas publicaciones [44] estos "tres aspectos de la geometría" son considerados como paralelos: "la equivalencia de verdad de los tres aspectos es la idea dominante de la doctrina previa de la geometría elemental".[45] Ahora bien, si en vez de mezclar los niveles heterogéneos de la evolución, o la jerarquía de los mecanismos mentales, nos ubicamos en el punto de vista del desarrollo psicológico y la historia y, en consecuencia, de la construcción efectiva del espacio, no hay duda de que el dominio de lo "intuitivo" se estrecha a medida que aparecen los progresos de esta construcción; en cambio, los dominios de lo "experimental" (el espacio físico) y lo "formal" (la axiomática) se reparten siempre más completamente los despojos del primero: ésta es la mejor prueba de que la "intuición" no es sino un conjunto de términos de tránsito, un complejo inicial indiferenciado, cuya diferenciación conduce, por una parte, a la composición reflexiva de las estructuras formales, apoyadas sobre la coordinación de las acciones u operaciones y, por la otra, al establecimiento de relaciones entre los objetos físicos, por medio de las acciones particulares proporcionadas por la experiencia.

7. La intuición imaginada y las operaciones espaciales concretas de carácter "intensivo". Para comprender qué es la verdad geométrica, incluso en su forma puramente axiomática, no basta entonces con pasar directamente del espacio perceptual o de la "intuición" a las cons-

[44] F. Gonseth: *La géométrie et le problème de l'espace*, II. *Les trois aspects de la géométrie*. Neuchâtel. Le Griffon, 1946.
[45] *Ibid*., pág. 84.

trucciones formalizadas: importa seguir nivel por nivel las etapas de la formación real. Así, en estos puntos 7 y 8, describiremos las elaboraciones propias de los tres niveles distinguidos en el punto 6: el de la intuición imaginada, el de las operaciones concretas y, por último, el de las operaciones formales.

Hemos insistido (en los puntos 4 y 5) sobre el hecho de que el espacio perceptual es esencialmente incompleto, por estar siempre vinculado al campo presente y próximo del sujeto, sin posibilidad de relacionar estos diversos campos en un espacio único y general. El espacio sensoriomotor proporciona luego y en parte esta posibilidad, pero de modo puramente práctico y motor, es decir, mediante anticipaciones breves y sin representación de conjunto de la totalidad de los desplazamientos o caminos recorridos. El "espacio" como medio unificado, común a todos los fenómenos, es pues una conquista de la inteligencia representativa, y sigue siendo extraño a la percepción o al movimiento en tanto tales. Se trata entonces de comprender el mecanismo de su construcción.

Para el empirismo, que cree en la percepción-copia, simple reproducción del mundo exterior y que concibe la imagen como una prolongación directa de las percepciones, el espacio intuitivo no es sino la reunión de las diversas imágenes, conservadas como recuerdos de las sucesivas percepciones. Sin embargo, así como los elementos sensoriales de la percepción como tal sólo constituyen un sistema de índices que sirve de significante de las diversas actividades perceptuales y motrices, así las imágenes espaciales (imágenes de formas, longitudes, etc.) constituyen símbolos cuyas significaciones ya no son simplemente actividades perceptuales o movimientos efectivos, sino posibles acciones sobre los objetos. La naturaleza propia de la intuición espacial imaginada es por lo tanto y de entrada muy compleja: es a la vez simbólica en su expresión y activa en su contenido, pero en su comienzo se refiere a acciones breves, aisladas y aún no agrupadas en operaciones que puedan ser compuestas entre sí de un modo coherente.

En primer lugar, ¿qué es una imagen mental? Es una imitación interiorizada que sirve como simple significante simbólico de las acciones ejercidas sobre los objetos o de estos objetos en tanto metas de las acciones. Una imagen auditiva, como una palabra o una melodía oídas interiormente, no es sino una imitación interiorizada (es el caso del "lenguaje interior" en general) o un esbozo de imitación, aún no exteriorizado, de la palabra o el canto. Una imagen visual tiene una propiedad semejante: imaginar una forma consiste en poder reproducirla, no sólo porque esta reproducción se apoyará en la evocación imaginada, sino porque esta evocación de por sí ya es un comienzo de reproducción motriz.[46] Ahora bien, la imitación es, en sus raíces, la prolongación de la acomodación de los esquemas sensoriomotores; se percibe entonces cómo pueden concebirse las imágenes

[46] Véase Piaget: *La formation du symbole chez l'enfant*. Delachaux et Niestlé. Véase nota 7 del cap. 1, vol. I.

visuales como provenientes, no de la percepción propiamente dicha, sino de la actividad perceptual o sensoriomotriz como fuente de la imitación. Aun más, porque es el resultado de la acomodación de los esquemas sensoriomotores (imitación) y no de su actividad entera, la imagen desempeña un papel de significante simbólico, mientras que la asimilación sensoriomotriz, que caracteriza lo esencial de esta actividad, se halla en el punto de partida de la asimilación conceptual, cuando puede apoyarse a la vez en los símbolos imaginados y en los signos verbales.

Aclarado este punto, es incontestable que la intuición espacial elemental se apoya en imágenes, como lo hace todo pensamiento intuitivo y preoperatorio, pero también resulta claro que estas imágenes no significan nada de por sí, sólo significan algo en referencia a posibles acciones, a las que se asimilan los objetos y que les otorga entonces sus determinaciones espaciales. Por ejemplo, solicitemos a niños de 4 a 6 años que se imaginen la sección de un volumen de pasta para modelar (por ejemplo, un cilindro que se cortará transversal o longitudinalmente), o la superficie obtenida cuando se abren los lados de un cubo, etc., o también simplemente la forma que adquirirá un nudo cuando se apriete o se afloje un poco, etc. Observamos entonces que los niños son incapaces de efectuar la menor anticipación por medio de la imagen antes de que se esboce o inicie la acción real, pero cuando se comienza a cortar el cilindro, cuando el volumen comienza a desplegarse o cuando se está apretando o aflojando el nudo, el movimiento ya esbozado puede prolongarse en la imaginación. En otros términos, la imagen no precede a la acción, pero una vez esbozada la acción real puede prolongarse en imágenes.[47]

En sus comienzos, la intuición geométrica es un conjunto de acciones interiorizadas, cuya imagen no es sino el símbolo constituido por su acomodación imitadora. Sin embargo, como las acciones representadas mentalmente por la intuición naciente son más ricas que las actividades sensoriomotrices (de las que proceden originariamente), por el hecho mismo de que pueden completarse simbólicamente, rápidamente dan lugar a coordinaciones que superan el espacio próximo, y proporcionan así el punto de partida del espacio representativo como medio común a los diversos fenómenos. Ahora bien (situación interesante), estas coordinaciones recorren, otra vez, pero en este nuevo plano ampliado constituido por el pensamiento, las etapas ya franqueadas en parte, y solamente en el campo próximo, por el espacio perceptual. En otros términos, las primeras intuiciones espaciales serán de orden topológico, como lo eran las primeras percepciones del espacio, y solamente después se constituirán simultáneamente las intuiciones proyectivas y euclidianas, así como las percepciones espaciales desarrolladas por la actividad perceptual se han convertido, ellas también, y a posteriori, en proyectivas y euclidianas.

[47] Véase Piaget e Inhelder: *La représentation de l'espace chez l'enfant*. París, PUF, caps. IV, IX y X.

Sucede así que, cuando se examina la evolución del dibujo (en el cual L. Brunschvicg ubica el comienzo de la construcción de las formas geométricas), observamos que las primeras relaciones accesibles a los niños son las relaciones topológicas de vecindad y envolvimiento (con distinción de las formas abiertas y cerradas, y de los elementos interiores, exteriores o incluso ubicados en la frontera): por ejemplo, a una edad en que el niño sólo copia los cuadrados y los triángulos otorgándoles la forma de un círculo (es decir, simples curvas cerradas) sabrá muy bien cómo hacer para situar un círculo pequeño sobre la frontera, en el exterior o en el interior de otra figura. Las relaciones intuitivas de orden son también precoces (pero en una forma aún no operatoria, es decir, sin inversión posible, ni comprensión de la simetría de la relación "situado entre" en el caso de reversiones), etc.[48] Por el contrario, las relaciones euclidianas (magnitudes, proporciones y, en particular, estructuración en un eje de coordenadas) y las proyectivas (elección y coordinación de las perspectivas en oposición a la mezcla de los puntos de vista) sólo aparecen más tarde y correlacionadas entre sí[49]: en efecto, en el dominio de la intuición imaginada como en el dominio de la percepción, las relaciones topológicas sólo suponen el establecimiento de relaciones de manera progresiva que siguen siendo interiores a las figuras o las configuraciones dadas; en cambio, las coordinaciones proyectivas y euclidianas suponen una ubicación de cada figura respecto de todas las restantes y, en consecuencia, una estructuración de conjunto del espacio. Ahora bien, si las relaciones euclidianas más simples que intervienen en el dibujo (por ejemplo, de un cuadrado o un triángulo) son accesibles a la intuición imaginada (aunque por ejemplo la copia de un rombo ya presenta dificultades muy superiores, porque requiere el establecimiento de la relación de las inclinaciones), las construcciones de conjunto que suponen un sistema de coordenadas o una coordinación de perspectivas superan las posibilidades de la simple imagen intuitiva.

En resumen, la intuición espacial específica del nivel que se inserta entre el espacio sensoriomotor y las primeras operaciones concretas (de 2 a 7 años en promedio) consiste en acciones imaginadas en sus resultados, pero breves y, al comienzo, con poca posibilidad de composición mutua. Entonces, ella no es suficiente, durante mucho tiempo, para poder construir un espacio de conjunto, por las mismas razones por las que las percepciones sucesivas tampoco lo lograban, sin la intervención de una actividad perceptual y sensoriomotriz. Se reproduce el mismo fenómeno en un nivel superior y en la escala de la representación, en oposición con la acción efectiva; sin embargo, las operaciones concretas son las que desempeñarán esta vez el papel coordinador y estructurador. ¿En qué consisten estas operaciones?

[48] Véase Piaget e Inhelder: *La représentation de l'espace chez l'enfant*. París, PUF, cap. III.

[49] *Ibid.*, caps. VI-XIV.

Las acciones —efectivas o mentales— que se encuentran en la raíz de la intuición del espacio siguen orientándose, al nivel de la intuición imaginada inicial, en sentido único hacia su objetivo y no son aún susceptibles de composición reversible. Sin embargo, el progreso mismo de estas acciones conduce a una gradual articulación de las intuiciones y se compromete así en la dirección de la reversibilidad. Las acciones mentalizadas se constituyen en operaciones apenas su coordinación alcanza el nivel de la composición reversible: las operaciones espaciales concretas representan pues la forma de equilibrio móvil hacia la que tienden las acciones interiorizadas (intuiciones) iniciales pero que sólo alcanzan después de haber conquistado la movilidad necesaria y la capacidad de coordinarse en los dos sentidos del recorrido. Ahora bien, apenas se alcanza este nivel de composición reversible, término de la articulación de las acciones al comienzo breves y rígidas, un conjunto de caracteres cualitativamente nuevos opone las operaciones a las acciones de sentido único del nivel precedente: en los hechos mismos surge entonces cierta lógica del espacio, o más precisamente el espacio se convierte en una lógica del objeto, después de haber sido simplemente su representación estática; deja de ser una simple descripción de estados y se promueve al rango de sistema de transformaciones.

Hay un buen ejemplo que muestra a la vez la filiación de las operaciones espaciales, respecto de las acciones intuitivas, y el carácter cualitativamente nuevo del agrupamiento de estas operaciones: el desarrollo espontáneo de las conductas que anuncian la medición. Cuando solicitamos a los niños de diferentes edades que construyan una torre que sea tan alta como un modelo que se encuentra a cierta distancia y colocado a un nivel diferente, comprobamos que los más chicos se contentan con comparaciones perceptuales, mediante la vista o con la ayuda de palitos, para relacionar los extremos superiores (sin tener en cuenta el desajuste de las bases); luego, después de haber intentado aproximar materialmente los objetos que tienen que comparar, utilizan movimientos imitativos para transportar la altura (gestos de los brazos, puntos de referencias en el propio cuerpo, etc.). Después, piensan en construir una tercera torre, que sirva como medio término móvil y, por último (únicamente alrededor de los 7 años), consiguen utilizar bastones o reglas como medidas comunes. Ahora bien, esta última conducta transforma las acciones precedentes en operaciones, por el hecho mismo de que se hacen susceptibles de composiciones transitivas, asociativas y reversibles, del tipo $A = B$; $B = C$ por lo tanto $A = C$. Vemos de qué modo este agrupamiento operatorio se distingue cualitativamente de las simples comparaciones perceptuales e intuitivas, al mismo tiempo que constituye la forma de equilibrio móvil lograda al término de la articulación de las intuiciones anteriores.[50]

Ahora bien, desde el punto de vista epistemológico, estas primeras

[50] Véase Piaget, Inhelder y Szeminska: *La géométrie spontanée de l'enfant*, cap. II.

estructuras propiamente operatorias del espacio son las más instructivas en cuanto a las relaciones entre el espacio intuitivo y el espacio formalizado, porque estos primeros agrupamientos de operaciones son los que completan o intentan reemplazar el espacio percibido o imaginado por un sistema de transformaciones intelectuales mediante la coordinación de las intuiciones estáticas particulares hasta conseguir englobarlas en una estructura de conjunto (de modo semejante a aquella de la cual los esquemas sensorio-motores ya han elaborado un sistema práctico al integrarse los simples esquemas perceptuales: véase el punto 4).

Nos parece que en este sentido hay una doble comprobación que domina el conjunto de la cuestión. Por una parte, el espacio no aparece en absoluto desde el comienzo como una estructura matemática ya que, en primer lugar, se construye por medio de operaciones cualitativas de carácter "intensivo" (vol. I, cap. I, punto 3), antes de dar lugar a una cuantificación matemática, es decir, "extensiva" o "métrica". Desde este punto de vista, la construcción del espacio es exactamente paralela a la del número: así como la elaboración del número está preparada por operaciones lógicas, aún no numéricas, cuya fusión en nuevas síntesis es la única que constituye las operaciones aritméticas, así el espacio matemático, de carácter extensivo o métrico, procede de un espacio "intensivo" cuyas transformaciones cualitativas se fusionan luego en operaciones matematizadas. Sin embargo y por otra parte, las operaciones intensivas que constituyen en primer lugar el espacio operatorio no son idénticas a las operaciones lógicas de clases y relaciones asimétricas, cuya síntesis culmina en la formación del número, sino que, al mismo tiempo que son isomórficas entre sí, siguen teniendo en el plano concreto un carácter distinto que llamaremos "infralógico". Sólo a partir del momento en que se las formaliza, es decir, en que se las expresa mediante simples proposiciones hipotético-deductivas y se las somete al sistema de las operaciones formales —y ya no concretas—, se pueden asimilar con las operaciones lógicas. Por el contrario, en el plano concreto se distinguen de ellas y la importancia de esta distinción entre las operaciones infralógicas y las operaciones lógico-aritméticas se pone de manifiesto por el hecho de que un espacio concreto constituye un esquema único, es decir, con una sola componente o continuo, en oposición a una sucesión de números enteros o racionales, y a un sistema de clases o relaciones, cuyas totalidades no están sujetas a cumplir esta condición. Este carácter es el que provocó durante tanto tiempo la ilusión de que el espacio era más "sensible" que el número, cuando en realidad poseen una propiedad intelectual y operatoria exactamente comparable (y además con anteriores estadios intuitivos preoperatorios exactamente semejantes), con la única diferencia, precisamente, de que sus operaciones constitutivas tienen la propiedad de ser "infralógicas" y no "lógicas".

Entonces, ¿en qué consisten estas operaciones infralógicas constitutivas del espacio intelectual y, como veremos más adelante, del tiempo y las ideas físicas elementales? Son isomorfas a las operaciones lógicas. Pero mientras que las operaciones lógicas parten de los objetos como datos invariantes y se limitan a reunirlos (agrupamientos aditivos y multiplicativos de

clases) o seriarlos (agrupamientos aditivos y multiplicativos de relaciones), las operaciones infralógicas se aplican a la construcción misma del objeto y tienen el papel de reunir y seriar los elementos de este objeto, y ya no los objetos como tales. Al distinguirse un objeto de un conjunto de objetos precisamente porque constituye un sistema de una sola componente, las operaciones infralógicas no descansan sobre las semejanzas (como las clases y las relaciones simétricas de propiedad "lógica"), o sobre las diferencias (como las relaciones asimétricas "lógicas"), sino sobre las relaciones de vecindad o sobre las diferencias de posición. Por lo tanto, estas acciones y operaciones son las formadoras de los objetos que constituyen el espacio (y el tiempo, etc.); el espacio no es sino el conjunto de las relaciones determinadas por las transformaciones de posiciones de los elementos del objeto considerado (abstracción hecha de la velocidad, los desplazamientos, que determinan el tiempo); en cambio las clases y las relaciones lógicas consisten en vincular los objetos entre sí independientemente de estas transformaciones. Pero, repitámoslo, resulta claro que esta distinción se limita al dominio de las operaciones concretas: en el plano formal, nada impide tratar un "conjunto de puntos" como una clase lógica, un orden de sucesión como un sistema de relaciones asimétricas, etcétera.

Por otra parte, es claro que cuando oponemos de este modo las operaciones concretas infralógicas a las operaciones concretas lógico-aritméticas, no pretendemos generar deductivamente el espacio, ya que sería un círculo vicioso evidente querer explicar todas las estructuras espaciales por las transformaciones internas del objeto puesto que él implica ya la extensión. Simplemente queremos describir cómo suceden las cosas en la realidad del desarrollo psicológico, e insistir en este sentido en dos aspectos de la génesis real: 1º que las operaciones infralógicas prolongan, en tanto se refieran a las transformaciones del objeto, la construcción misma del objeto ya iniciada por la percepción y la inteligencia sensoriomotriz (véase punto 4); 2º que la construcción operatoria del espacio, en el interior de lo que los matemáticos llaman, de modo global, "intuición" geométrica y de lo que ellos consideran así como un dato previo a la axiomatización, anuncia en realidad esta formalización misma y procede de leyes de organización intelectual y de equilibrio gradual, semejantes a las leyes que presiden la formación del número.

Aclarado este punto, el análisis genético muestra que, al nivel en que las intuiciones espaciales imaginadas progresivamente articuladas (entre los 4 y los 6-7 años) se constituyen en operaciones propiamente dichas —es decir en agrupamientos caracterizados por sus composiciones reversibles—, hay que distinguir tres grandes sistemas de operaciones espaciales: el primero que se constituye (6-8 años) se refiere a las transformaciones de las figuras de manera progresiva (relaciones topológicas); el segundo (que culmina alrededor de los 8-9 años solamente) tiene que ver con la coordinación de los puntos de vista a partir de los cuales se transforman las figuras (relaciones proyectivas); el tercero (correlativo del segundo y que sólo culmina junto con él) tiene que ver con las transformaciones resultantes

de los desplazamientos y que se refieren a ejes de coordenadas (relaciones euclidianas, incluidas las similitudes). Ahora bien, cada uno de estos tres sistemas consiste, en primer lugar, en operaciones exclusivamente "intensivas" en el sentido definido en el cap. 1 (punto 3), antes de producir cuantificaciones extensivas o métricas.

No vamos a volver a presentar aquí la descripción detallada de estas diversas operaciones infralógicas, cuyo interés sólo es genético y no matemático, puesto que ya la hemos expuesto en otra parte.[51] Nos contentaremos pues con algunos ejemplos destinados a hacer notar, a la vez, el carácter "intensivo" de estos agrupamientos y su isomorfismo con los agrupamientos de clases y relaciones lógicas.

Los dos agrupamientos fundamentales de las operaciones topológicas elementales se refieren a la partición y el orden. La partición implica dos operaciones, inversas entre sí; una consiste en separar mediante cortes cualesquiera los elementos de un continuo perceptual (por ejemplo, una línea o una superficie) y la otra en reunir en función de sus vecindades las partes que se han separado. Ahora bien, estas dos operaciones, por más simples que sean, no están dadas con su reversibilidad en las intuiciones imaginadas preoperatorias: por el contrario, los niños piensan que un cuadrado o un triángulo no pueden distribuirse en partes cada vez más pequeñas, y que al mismo tiempo sus elementos últimos sigan siendo siempre cuadrados o triángulos; y si por acaso se llegara más allá de estos elementos últimos, hasta los "puntos" (en el sentido de pequeñas superficies perceptibles), la reunión de estos últimos no produciría nunca una figura continua. Cuando estas operaciones de descomposición y recomposición se constituyen —alrededor de los 7 años— en su forma reversible y culminan en el resultado fundamental de la conservación de las totalidades espaciales (véase más adelante), resulta claro, por otra parte, que no se trataría de transformaciones infinitas que implicasen una cuantificación extensiva (como los conceptos matemáticos de límite, punto de acumulación, ruptura, etc.), ni métrica (por correspondencia de los segmentos con los números racionales e irracionales). Por lo tanto, la partición y la adición partitiva permanecen durante mucho tiempo en estado de operaciones "intensivas" finitas cuyo "agrupamiento" es isomorfo a la del encaje de las clases: $A + A' = B$; $B + B' = C$, etc. (vol. I, cap. I, punto 3); la única diferencia es que los elementos A, A', B', etc., ya no son objetos reunidos en clases en función de sus semejanzas cualitativas, sino "partes" finitas de objetos, reunidas en "partes" de orden superior (hasta culminar en el objeto total) en función de sus vecindades.[52] En cuanto a las operaciones de orden, que llamaremos "emplazamientos"[53], corresponden también a intuiciones elementales, pero que sólo se agrupan alrededor de los 6-7 años: proceder desde el orden directo al orden inverso y comprender que la

[51] Piaget e Inhelder: *La représentation de l'espace chez l'enfant.* París, PUF, 1947.

[52] Véase Piaget e Inhelder, *loc. cit.*, cap v.

[53] Véase Piaget: *Les notions de mouvement et de vitesse chez l'enfant.* París, PUF, 1946, caps. I-II, y Piaget e Inhelder, *loc. cit.*, cap. III.

relación "situado entre" se conserva independientemente de las inversiones, supone el mismo mecanismo de composición reversible que la partición, pero es isomorfo al agrupamiento lógico de la seriación de las relaciones asimétricas (con adición no conmutativa de las relaciones, en oposición a la adición partitiva o a la de las clases, ambas conmutativas). Por otra parte, las operaciones de emplazamiento no sólo se aplican a los elementos de las sucesiones lineales sino también a sucesivos envolvimientos (curvas cerradas que envuelven el plano, o cajas que se envuelven entre sí en el espacio). En este sentido, observemos que el concepto de envolvimiento proporciona la intuición psicológicamente más simple de las dimensiones del espacio, antes de cualquier estructuración euclidiana de las coordenadas.[54]

A partir de estas operaciones intensivas que se refieren a las relaciones topológicas, el sujeto pasa a la construcción del espacio proyectivo desde el momento en que ellas se realizan en función de un "punto de vista" considerado como tal, es decir, en función de la coordinación de los "puntos de vista" posibles. Nada más instructivo en este sentido que la construcción operatoria concreta de la recta proyectiva o puntual. Es evidente que en el espacio de la percepción la recta es una de las primeras formas que puede ser reconocida apenas se ha superado el nivel de las primeras percepciones sincréticas que sólo se refieran a las relaciones de vecindad y separación. Sin embargo, si bien la recta perceptual es muy precoz, no por ello el niño sabe construir de entrada una recta entre dos puntos, cuando carece de un sistema perceptual como marco de referencia o, en particular, en oposición con él. Por ejemplo, si se colocan dos mojones en la extremidad de una mesa rectangular y se solicita al niño que coloque otros mojones que formen una línea recta con los dos primeros, el niño consigue hacerlo fácilmente si esta recta es paralela al borde de la mesa, pero presenta grandes dificultades —aun a los 4-6 años— si la recta que debe construir es oblicua respecto de este borde. Vemos aquí del modo más claro la carencia de la intuición imaginada preoperatoria: esta forma de representación espacial es incapaz de por sí de anticipar una línea recta, cuando ella entra en conflicto con la configuración perceptual. El problema se resuelve de modo operatorio (solamente alrededor de los 7 años) cuando el niño coloca los mojones entre los términos límites de tal modo que, colocado en uno de los extremos sólo vea, siempre y cuando enfoque correctamente, un único mojón que oculte todos los restantes. Esta operación espontánea del enfoque, que genera la recta proyectiva, corresponde así a la célebre definición de Platón del *Parménides* (137 E): "Se llama recta a la línea cuyo punto medio se encuentra en el trayecto entre los dos extremos".[55] La recta proyectiva es pues una línea, ordenada topológicamente, pero tal que sus elementos se encuentren todos unos detrás de los otros si se los enfoca desde cierto "punto de vista" (desde el punto

[54] Piaget e Inhelder: *La représentation de l'espace chez l'enfant*. París, PUF, cap. IV.

[55] Citado por Brunschvicg (*Étapes*, 2ª ed., pág. 504) precisamente como operación extraída de la práctica cotidiana.

de vista llamado "de los extremos"). Ahora bien, esta intervención de los "puntos de vista" caracteriza cada una de las operaciones proyectivas concretas, entre otras a aquellas que desembocan en el establecimiento de una perspectiva correcta en los dibujos espontáneos. La más importante de estas operaciones es, sin duda alguna, aquella que coordina los puntos de vista en función de sus reciprocidades (de donde surge la concepción de simetría entre puntos de vista opuestos) y así genera una coordinación cualitativa de conjunto del espacio proyectivo prematemático.

En estrecha correlación con este espacio proyectivo, caracterizado así por la descentración de las intuiciones iniciales egocéntricas (siendo este egocentrismo inicial resultante de la ignorancia de las diferencias entre el punto de vista propio y el de los otros observadores) y por el establecimiento de correspondencias entre las relaciones inherentes a los diversos puntos de vista, se constituye el espacio euclidiano que es la resultante, ya no de la coordinación de los puntos de vista, sino de la de los objetos mismos considerados como partes de un solo objeto total que es el sistema de los elementos referidos a los ejes de coordenadas.

El espacio euclidiano marca pues la culminación del espacio operatorio en el plano de las operaciones concretas, y no su punto de partida. Esta aserción puede resultar sorprendente, hasta tal punto es profundo el hábito de considerar las relaciones elementales de la métrica euclidiana como relaciones primitivas desde el punto de vista genético. Esta ilusión es la resultante de dos causas y no parece difícil percibir el carácter erróneo de cada una de ellas. La primera es que uno se imagina que la génesis real ha de adecuarse a la sucesión histórica de los descubrimientos reflexivos, cuando en realidad esta génesis invierte a menudo su orden y se encuentra así mucho más cerca de lo que podría pensarse de la reconstrucción teórica, e incluso axiomática, del espacio. Así, la noción de correspondencia biunívoca apareció tarde en la ciencia (con la definición cantoriana de la potencia en la teoría de los conjuntos), y sin embargo —como lo ha mostrado L. Brunschvicg— interviene ya en el intercambio uno a uno que constituye el número práctico. Así, las ideas topológicas preceden a las operaciones euclidianas, tanto desde el punto de vista genético como desde el punto de vista axiomático. La segunda causa que explica la primacía que se atribuye al espacio euclidiano es la resultante de la confusión entre el espacio perceptual y el espacio representativo clasificados en el mismo término impreciso de espacio intuitivo, del cual se percibe, en este punto quizá más aún que en otros, cuán heterogéneas son las realidades que recubre y cuántas fuentes de contradicciones constituyen. Desde el punto de vista perceptual, las relaciones euclidianas son efectivamente bastante precoces, pero sin duda alguna no son primitivas puesto que sólo se establecen con la organización de la constancia perceptual de las magnitudes (segunda mitad del primer año). Sin embargo, en el plano representativo (intuición imaginada y luego operaciones concretas) los esquemas ya construidos por la percepción y la inteligencia sensoriomotriz (en particular, el esquema del objeto permanente, vinculado a la vez con la constancia

perceptual de las magnitudes y el grupo práctico de los desplazamientos) deben reconstruirse en su totalidad y su nueva elaboración procede en el mismo orden que en el plano inicial; por lo tanto, sólo una vez que han culminado y se han agrupado operatoriamente las intuiciones topológicas se constituyen las operaciones euclidianas en correlación con las operaciones proyectivas.

La mejor prueba del carácter tardío de las operaciones euclidianas —o también de la oposición cualitativa fundamental que separa desde el comienzo las intuiciones imaginadas de los mecanismos operatorios concretos, confundidos en la misma denominación de "intuición" representativa— es que, durante todo el período del pensamiento intuitivo comprendido entre los 2-3 y 6-7 años, el sujeto no puede concebir la conservación necesaria de las relaciones fundamentales de distancia, longitud, superficie, etc.: admite que la distancia entre dos objetos se modifica apenas se intercala un tercer objeto entre ellos (por más que los primeros han permanecido inmóviles); que dos varillas, de las cuales se reconoce que tienen las mismas longitudes cuando sus extremidades coinciden, dejan de ser iguales cuando se desplaza una de ellas y se la adelanta unos centímetros respecto de la otra; que una superficie cambia de valor total si se ordenan diferentemente sus elementos; que cuando se han eliminado, en regiones distintas de dos mismas áreas, dos superficies parciales iguales, las superficies restantes no son equivalentes, etc. Sólo alrededor de los 7-8 años se reconocen como necesarias estas diversas formas de conservación.[56]

Ahora bien, esta conservación de las longitudes, superficies, etc., no es un resultado de la medición sino que es, por el contrario, la condición previa de toda operación de medición: en efecto, es imposible comparar dos magnitudes —desplazando una para aplicarla sobre la otra— si el movimiento modifica la primera y si la igualdad comprobada por superposición ya no significa nada una vez que se han separados los términos; resulta aun más imposible compararlas mediante una medida común, si el metro que sirve como término medio se dilata o contrae en el curso de la operación. Por lo tanto, es necesario admitir que la conservación de las magnitudes euclidianas es una construcción anterior a toda métrica obtenida únicamente a partir de las operaciones infralógicas de carácter "intensivo". Lo cual puede demostrarse en la observación: cuando se aprende a reunir las partes en un todo, por una composición reversible que sólo se apoya en relaciones de parte a todo (por ejemplo, $A + A' = B$ de donde $A < B$ y $A' > B$, pero sin establecer relaciones cuantitativas entre A y A'), se adquiere la conservación de las magnitudes; y ello sucede antes que su matematización sea posible, es decir, antes que las partes (A y A') puedan compararse entre sí (en la forma $A > A'$, $A < A'$ o $A = A'$), por lo tanto anteriormente a toda cuantificación "extensiva" o métrica.

56 Véase Piaget, Inhelder y Szeminska: *La géométrie spontanée de l'enfant.* París, PUF, 1948.

Esta necesidad de la previa construcción de las diversas formas de conservación de las magnitudes constituye de este modo la mejor prueba de la existencia genética de las operaciones infralógicas de carácter intensivo. En el terreno euclidiano (por lo tanto, en el terreno de la coordinación de los objetos, en oposición a la coordinación de los puntos de vista), estas operaciones infralógicas intensivas consisten esencialmente en reunir los elementos en totalidades (aditivas o multiplicativas) y en colocar en orden de sucesión (o en varios órdenes simultáneos de emplazamiento), pero aplicando estas reuniones o estas relaciones de orden tanto a los emplazamientos inmóviles (remitidos a elementos de referencia que se suponen fijos) como a las magnitudes móviles. De donde surge, en primer lugar, la construcción de los sistemas elementales de coordenadas que consisten, anteriormente a toda métrica, en simples correspondencias de particiones ordenadas en dos dimensiones; y, en segundo lugar, la composición de los "desplazamientos" que aparecen anteriormente a su cuantificación métrica, como simples transformaciones de orden o "emplazamiento".[57]

8. La constitución de la medición y la matematización del espacio por cuantificación extensiva y métrica. Las operaciones concretas infralógicas —cuya descripción precede y que otorgan su forma definida a aquella que los matemáticos llaman la "intuición" del espacio— son pues totalmente comparables con las operaciones lógicas concretas, que se refieren a las clases y las relaciones; la única diferencia es que se refieren a las transformaciones del objeto y no a las reuniones o seriaciones de objetos discretos; la adición de las clases adquiere entonces, por este hecho mismo, la forma de la partición y la adición de las partes, y la adición de las relaciones asimétricas la forma de operaciones de emplazamiento y desplazamiento. Ahora bien, ya vimos (vol. I, cap. I, punto 6) de qué modo el número entero era el resultado de la fusión operatoria de los "agrupamientos" de clases y las relaciones asimétricas en un solo "grupo" que presenta, en lo finito, un carácter a la vez cardinal y ordinal. Por lo tanto, si la correspondencia entre los dos sistemas lógico e infralógico es exacta, puede esperarse que la medición (que equivale en el dominio espacial a lo que es el número en el terreno de los conjuntos discontinuos) también sea el resultado de una fusión entre las operaciones de partición y las de desplazamiento. También cabe pensar que la cuantificación "extensiva" sea el resultado de una generalización —que se extiende a las relaciones entre las partes de un mismo todo— de las relaciones establecidas por las operaciones "intensivas" entre las partes y el todo como tal.

1. En primer lugar, ¿qué es, desde el punto de vista genético, la medición de una longitud? Tomemos como punto de partida uno de los axiomas métricos más intuitivamente evidente y que desde Eudoxio ha

[57] Piaget e Inhelder: *La représentation de l'enfant chez l'enfant*; Piaget, Inhelder y Szeminska: *La géométrie spontanée chez l'enfant*, y Piaget: *Les notions de mouvement et de vitesse chez l'enfant*. París, PUF.

recibido la denominación de postulado de Arquímedes. Tomemos un segmento de recta AB y un punto C situado más allá de B; sea cual fuere la posición de C, siempre se podrá, transportando sucesivamente cierta cantidad de veces la longitud AB, ir más allá del punto C. Analicemos si un sujeto, que sólo se halla en posesión de las intuiciones espaciales imaginadas y preoperatorias, o únicamente en posesión de las operaciones concretas de carácter "intensivo", descriptas en el punto 7, puede entender este axioma. Al nivel de las simples intuiciones imaginadas, no puede hacerlo: no sólo los niños pequeños creen que una longitud desplazada no se conserva, sino que además, al querer transportar cierta cantidad de veces el segmento AB, construyen por lo general segmentos A'B' > AB luego A"B" > A'B' partiendo de la idea de que estos nuevos intervalos, al sumarse a los anteriores, se hacen mayores. En cambio, al nivel de las operaciones intensivas concretas pueden verificar por superposición la congruencia de dos longitudes cualesquiera (no sucesivas) $A_1B_1 = A_2B_2$ y $A_2B_2 = A_3B_3$ y extraer la conclusión $A_1B_1 = A_3B_3$. Sin embargo, este doble descubrimiento de la igualdad por congruencia y la transitividad de las congruencias no basta todavía, desde el punto de vista psicológico, para constituir la medición: sólo se trata de operaciones infralógicas "intensivas" que pueden compararse con las operaciones simplemente lógicas siempre y cuando no intervenga la reiteración de una unidad como sucede en el axioma de Arquímedes: AB + AB = 2AB; 2AB + AB = 3AB; etc. Ahora bien, la experiencia muestra que existe un desajuste apreciable entre el momento en que se hace accesible el empleo de una "medida común" cualitativa (transitividad de las congruencias) y el transporte de un segmento-unidad AB, es decir, de una parte dada aplicada sobre las otras partes del mismo todo hasta que se cubra la totalidad que se considera entonces como un múltiplo de la parte elegida como unidad.

Porque en las operaciones infralógicas descriptas anteriormente sólo interviene un solo tipo de relaciones cualitativas: las relaciones "intensivas" de parte a todo,[58] o sea A < B y A' < B si B = A + A', pero sin cuantificación de la relación entre una parte (A) y las otras (A'). A partir de entonces, y si nos atenemos a estas relaciones "intensivas", sólo existen, al comienzo, dos clases de operaciones posibles (más aquellas que se obtienen directamente a partir de ellas, por multiplicación, etc.): la partición, que consiste en descomponer B en A y A' (o en recomponer B reuniendo A y A') y el emplazamiento que consiste en situar A antes de A', o sobre A', etc. (o el desplazamiento que dispone A después de A' o bajo A', etc.). Pero no existe agrupamiento operatorio "intensivo" alguno cuyas operaciones puedan generar simultáneamente una partición y unos desplazamientos, porque la adición partitiva equivale a reunir entre sí algunos elementos de objetos, independientemente de su orden de sucesión, y porque el desplazamiento consiste (anteriormente a toda métrica) en modificar precisamente las relaciones de orden. Por el contrario, medir el todo B

58 En lo que sigue, el símbolo A representa, por ejemplo, un segmento de recta y el símbolo B un segmento mayor que A y que incluye a A.

mediante la parte A consiste simultáneamente en distribuir el todo en elementos (por lo tanto su parte A), y en desplazar la parte A sobre la parte restante A', de modo tal que se pueda comparar el elemento A elegido como unidad con la diferencia B — A: de donde resulta entonces la relación B = *n* A (por ejemplo, B = 2A si A = A'), lo cual implica efectivamente una partición y un desplazamiento reunidos, fusionados ambos en una nueva operación. Esta nueva operación no es otra que la comparación entre las partes A y A' por desplazamiento de una sobre la otra, y esta comparación difiere a la vez de la simple relación de inclusión A < B y del simple desplazamiento de A respecto de A', específicas de las particiones y emplazamientos de carácter intensivo. Constitutiva de una parte unidad, la comparación métrica es, en efecto, una fuente de reiteración, en oposición a los encajes inmóviles de la partición pura y los desplazamientos sin partición alguna; y esta reiteración testimonia de por sí la síntesis realizada entre las dos clases de operaciones, operaciones que de entrada son complementarias pero que hasta entonces se mantenían diferenciadas. Sin embargo, la construcción de una parte susceptible de reiteración y que sirve así como unidad suprime por ello mismo las cualidades diferenciales adjudicadas antes a las partes no relacionadas entre sí, resultantes de la partición "intensiva".

Así, vemos hasta qué punto la construcción de la medición es paralela, lógica y genéticamente, a la del número mismo, aunque esta construcción no sea la resultante de una simple aplicación del número a las magnitudes espaciales. En ambos casos, hay en primer lugar elaboración de las operaciones cualitativas intensivas: por una parte, adición de las clases y las relaciones asimétricas; por la otra, adición partitiva y adición de los desplazamientos. De donde surge la posibilidad de composiciones transitivas y reversibles que se traducen en el dominio lógico por las primeras deducciones concretas coherentes (con conservación de los conjuntos considerados) y, en el dominio infralógico, por la utilización de términos medios que sirven para la comparación por congruencia simple (A = B; B = C de donde A = C). Una vez constituidos los agrupamientos lógicos, las correspondencias numéricas operatorias resultantes de su síntesis aparecen sin más (en oposición a los números intuitivos que se producen entre 1 año y 5-6 años y que no son susceptibles de transformaciones operatorias mientras se apoyen en simples configuraciones imaginadas). En el dominio de la medición, por el contrario, el pasaje de la transitividad de las congruencias a la reiteración y al fraccionamiento de la unidad tarda todavía cierto tiempo, empleado precisamente en la fusión progresiva de la partición y el desplazamiento: esa demora (de 1 a 2 años) de la culminación acabada de las operaciones propiamente métricas respecto de la constitución del número entero operatorio es el resultado de las mayores dificultades intuitivas que presenta la concepción de un continuo formado por la reiteración de una de sus propias partes cuando esta parte no se halla delimitada de antemano por un corte perceptual. Este desajuste entre los estadios terminales del desarrollo del número entero y la medición hace aun más sorpren-

dente el paralelismo de los mecanismos formadores, mostrando así a la vez su relativa independencia y su convergencia final.

II. Pero la matematización del espacio no consiste solamente en una construcción de la cantidad métrica. Entre las partes A y A' de un mismo todo B, puede haber comparación sin que se reduzca A' a un múltiplo de A, es decir, sin que se constituya A como una unidad reiterable. Basta entonces establecer las relaciones A < A' o A' < A, y que esta diferencia entre A y A' sea susceptible de transporte o transformación regular en el caso de los siguientes encajes (entre B y B' en el seno de C, luego entre C y C' en el interior de D, etc.): en este caso hablaremos de cuantificación "extensiva" en general (siendo la cantidad métrica un simple caso particular de las cantidades extensivas).

Ahora bien, el análisis genético muestra que la cantidad extensiva aparece al mismo tiempo que la cuantificación métrica del espacio, e incluso aparece a menudo un poco antes (entre la culminación de los agrupamientos intensivos y la constitución de la medición). El ejemplo más simple lo constituye el dibujo de las líneas verticales de iguales alturas y separadas por distancias iguales, pero vistas en profundidad. En este caso, los elementos presentan las siguientes relaciones (si llamamos A al término más alejado y A', B', C', etc., a las diferencias entre A y B, B y C, C y D, etc.): $A < B < C < D \ldots$ y $A' = B' = C'$, etc., o incluso $A' < B' < C'$, etc. (por ejemplo con igualdad de las diferencias entre las diferencias). Hemos observado, en los mismos niveles genéticos, la aparición de la cuantificación extensiva en el desarrollo de las reacciones ante las situaciones de similitud, transformaciones afines del rombo, etcétera.[59]

Sabemos que todas las ramas de la geometría en las cuales no interviene el movimiento (topología, geometría proyectiva y afín, similitudes) reciben la denominación de "cualitativas", ya que las relaciones en juego pueden generarse independientemente de toda métrica. En realidad, no son para nada cualitativas en el sentido de las operaciones simplemente lógicas o infralógicas— cuya cuantificación se reduce a las relaciones "intensivas" entre la parte y el todo—, y necesariamente hacen intervenir la cuantificación extensiva resultante de las relaciones entre las partes de un mismo todo, cuya formación genética acabamos de recordar. Ya se trate de las relaciones no armónicas que intervienen en la geometría proyectiva, de las afinidades y similitudes o de las proporciones, etc., es evidente que su construcción, aun puramente gráfica, en el sentido en que Von Staudt opuso los métodos gráficos cualitativos a los métodos métricos, presupone relaciones precisas entre las partes. Así, en una proporción como $A_1/B_1 = A_2/B_2$ no basta con saber que los segmentos parciales A_1 y A_2 son inferiores a sus totalidades respectivas B_1 y B_2, sino que se trata de precisar en qué medida lo son. O bien entonces se traducirá la proposición en relaciones métricas, o bien se construirán las semirrectas B_1 y B_2

59 Piaget e Inhelder: *La représentation de l'espace chez l'enfant*. París, PUF, caps. XI y XII.

a partir de su punto de intersección, así como los segmentos sucesivos A_1 y A'_1 ($= B_1 - A_1$); A_2 y A'_2 ($= B_2 - A_2$): el segmento A_1 se encontrará, en este caso, en la misma relación respecto de B_1, que A_2 respecto de B_2, si las diferencias A'_1 y A'_2 son igualmente proporcionales, y esta igualdad de las relaciones se reconoce gráficamente por el hecho de que las rectas que unen las extremidades de A_1 y A_2, así como de A'_1 y A'_2 son paralelas entre sí. La construcción gráfica de las proporciones pone así, *ipso facto*, a las partes A_1 y A_2 en relación con sus partes complementarias A'_1 y A'_2; es lo que atestigua la propiedad "extensiva" de las proporciones,[60] en oposición con un "correlato" lógico intensivo que sólo conoce las relaciones de parte a todo, por ejemplo "la Isla de Francia es a Francia lo que el Latium es a Italia". Es evidente que esta cuantificación extensiva vuelve a encontrarse en el terreno de la topología, en la definición de los puntos de condensación ("todo entorno" en el postulado de Weierstrass significa entornos cada vez más pequeños); se encuentra también en el postulado de los intervalos encajados de Cantor, etcétera.

9. LAS OPERACIONES FORMALES Y LA GEOMETRÍA AXIOMÁTICA. Acabamos de ver (puntos 7 y 8) que la idea confusa que los matemáticos designan con el nombre de "intuición" espacial recubre dos realidades muy diferentes: una consiste en representaciones imaginadas no aptas para traducir las transformaciones y la otra consiste en operaciones concretas, es decir, en acciones interiorizadas susceptibles de composiciones transitivas, reversibles y asociativas —sea infralógicas e intensivas (como las operaciones lógicas) o extensivas y métricas—. Ahora bien, entre estos dos niveles "intuitivos" del conocimiento espacial (uno preoperatorio y el otro operatorio pero concreto) y la geometría axiomática en el sentido moderno del término, se intercala además un tercer nivel que, como lo hemos visto en el punto 6, corresponde a la geometría deductiva y formal de los griegos, pero que se presenta hoy como una construcción que sigue siendo intuitiva aunque en un sentido superior. Este tercer nivel se caracteriza, desde el punto de vista genético, por la constitución de las operaciones "formales" opuestas a las operaciones "concretas" examinadas hasta el momento.

Las operaciones concretas se refieren directamente a los objetos manipuleables, o a sus símbolos representativos, como las figuras que pueden dibujarse y esquematizarse en grados diversos. No por ello dejan de ser acciones u operaciones del sujeto, y el problema epistemológico sigue siendo el de saber cuál es la parte que en ellas corresponde al sujeto y aquella que corresponde a la experiencia, así como determinar si esta experiencia puede compararse con la experiencia física o implica otras relaciones entre el sujeto y el objeto (véase el punto 12). Sin embargo, las operaciones concretas son acciones propiamente dichas —materiales o mentalizadas—, y por ello se les puede otorgar el calificativo equívoco de "intuitivas". Por

[60] Estas relaciones extensivas son espontáneamente descubiertas por el niño en el nivel de las operaciones concretas, apenas ha culminado la elaboración de las operaciones intensivas. Véase Piaget e Inhelder: ***Représentation de l'espace chez l'enfant***, cap. XII.

el contrario, las operaciones formales se refieren a proposiciones, es decir, a hipótesis, y ya no a objetos, y cabe pensar que ello marca, en primer lugar, un corte muy claro que corresponde históricamente a la oposición entre la geometría deductiva griega —de Pitágoras a Euclides— y sus continuadores, y la geometría llamada "empírica" de los agrimensores egipcios.

Sin embargo, tanto el análisis genético como el análisis axiomático tienden a atenuar esta distinción entre las operaciones concretas y las operaciones formales iniciales, hasta tal punto que cabe pensar que hoy el corte se ha desplazado y separa fundamentalmente la axiomática de los antiguos y la de los contemporáneos. Por otra parte, este cambio de perspectiva es de por sí de tales características que pone en guardia a la epistemología genética acerca del valor relativo y dinámico de las antítesis que se consideran en primer lugar como siendo definitivas, problema que analizaremos un poco más adelante. Por el momento, se trata de comprender por qué aparece esta continuidad, que se vuelve a establecer a posteriori, entre las operaciones concretas y las operaciones formales elementales. Desde el punto de vista de la axiomática contemporánea, la deducción formal de Euclides sigue siendo intuitiva, por la sencilla razón de que las proposiciones que entran como componentes en el mecanismo deductivo de los razonamientos son elegidas en función de su significación concreta, es decir, de su contenido con referencia a las figuras reales o posibles. Uno de los creadores de la axiomática moderna, Pasch, reclamaba desde 1882 procedimientos de razonamientos independientes de la significación de los conceptos geométricos, donde sólo intervendrían las relaciones entre estos conceptos: la geometría deductiva de los griegos, aunque formal en su mecanismo operatorio, se concentró en cambio en primer lugar en las significaciones de los conceptos y de ahí su carácter aún semi-intuitivo.

Desde el punto de vista genético, el pasaje continuo de las operaciones concretas a las formales no es menos evidente que desde el punto de vista histórico y aclara las observaciones precedentes. En efecto, cada una de las operaciones concretas examinadas en los puntos 7 y 8 se hace susceptible, alrededor del fin de la infancia (desde más o menos los 12 años) de ser traducida en la forma de simples proposiciones. Esto no quiere decir que estas operaciones, en el nivel de los sistemas concretos (de 7 a 11 años), no fueran ya de algún modo juicios que expresaran, mediante proposiciones, posibles acciones exteriores pero interiorizadas en simples esquemas operatorios. Pero se trataba solamente de juicios o proposiciones que intervenían en ocasión de una manipulación real, una construcción gráfica o una representación imaginada, que simbolizara estas realidades. Por el contrario, las proposiciones sobre las que han de referirse las operaciones formales se desprenden de la acción, aun posible, o, más precisamente, comienzan a superarla indefinidamente: así la partición de un continuo desemboca, en el plano concreto, en elementos finitos ("puntos" en cantidad limitada, etc.), en cambio, alrededor de los 12 años, el niño reconocerá la posibilidad de continuar indefinidamente esta partición y la operación

formal se afirmará así de entrada como irrealizable y como sustituto del objeto representable por la hipótesis. Por ello, en el plano formal, desaparece toda distinción entre las operaciones infralógicas, que se refieren al objeto continuo, y las operaciones lógico-aritméticas, que se refieren a los objetos discontinuos reunidos en clases, seriados en relaciones asimétricas: el continuo se hace susceptible de un tratamiento lógico-aritmético y las relaciones espaciales se insertan en el marco de las relaciones en general. Todo sucede pues como si el mecanismo operatorio constituido por las operaciones concretas, una vez que están suficientemente articuladas las intuiciones iniciales, se liberase al nivel formal gracias a la nueva movilidad que la formulación abstracta de la deducción pura posibilita.

Se trata pues de comprender qué es esta lógica de las proposiciones que se superpone, a partir del nivel actual, a la de las operaciones concretas (infralógicas y lógicas), ya que esta lógica de las proposiciones es la que conducirá, por su desarrollo autónomo a la axiomática propiamente dicha.

Ahora bien, la lógica de las proposiciones difiere de la lógica de las operaciones concretas por el hecho de que es doblemente operatoria; se trata de operaciones de segundo grado y operaciones realizadas sobre otras operaciones. En efecto: 1º toda proposición es, en su contenido, una operación (intraproposicional), pero enunciada verbalmente en vez de ser ejecutada en la acción [61] —por ejemplo, los axiomas de Euclides del tipo "dos cantidades iguales a una tercera son iguales entre sí (ax. I), el todo es mayor que la parte (ax. VIII), dos magnitudes que pueden aplicarse una sobre la otra por congruencia son iguales (ax. V), dos partes iguales eliminadas de totalidades iguales dejan restos iguales", etc., son verdades que el niño descubre alrededor de los 7-8 años por medio de operaciones concretas (después de haberlas ignorado e incluso negado anteriormente, al nivel de las intuiciones imaginadas iniciales) y que el pensamiento formal enuncia simplemente como proposiciones verbales para razonar por su intermedio, así como el razonamiento concreto las aplicaba a la acción sin formularlas explícitamente—. 2º las proposiciones que son operatorias en sus contenidos respectivos se combinan luego entre sí según un conjunto de operaciones interproposicionales (implicaciones, incompatibilidades, alternativas, etc.) que ya no se refieren a clases y relaciones interiores a cada proposición sino a vínculos de las proposiciones entre sí: se trata entonces de operaciones que se refieren (pero en segundo grado) a las operaciones primarias enunciadas por las proposiciones.

En primer lugar, recordemos que estas operaciones interproposicionales pueden reducirse entre sí gracias, en particular, al juego de las disyunciones (v) y las conjunciones (.), es decir, gracias a las "formas normales" disyuntivas o conjuntivas. Por otra parte, las dos operaciones

[61] Por otra parte, es necesario distinguir el contenido lógico de la proposición, que consiste en operaciones lógicas que se refieren a las clases o las relaciones en juego, y el contenido extralógico al que se refiere este contenido lógico: se trata de las acciones posibles, cuyas operaciones de clases o de relaciones constituyen la interiorización.

fundamentales (p v q) y ($\bar{p} . \bar{q}$) constituyen la operación directa e inversa del sistema (ley de dualidad). Además, para comprender qué es la implicación, basta observar que dos proposiciones que se implican mutuamente son equivalentes: si A implica a B y B implica a A, A y B son equivalentes. Si, por lo tanto, A implica a B sin que la recíproca sea verdadera, A sólo es parcialmente equivalente a B: al afirmar B, se afirma entonces A *u* otra cosa. Llamemos A' a esta otra proposición que B puede implicar: se sigue que B implica a A o A' y recíprocamente [B $\supseteq$ (A v A')], es decir que B es equivalente a "A o A' ". Por ejemplo, la proposición "*x* es una elipse" implica "*x* es una sección cónica", pero la proposición "*x* es una sección cónica" implica "*x* es una elipse o una sección cónica diferente de la elipse". La implicación entre proposiciones supone pues una clasificación previa correspondiente a su contenido intraproposicional. Sucede así con las incompatibilidades, etc., y la misma contradicción: "*x* es a la vez A y A' " es contradictoria porque A y A' distribuyen a B en dos subclases complementarias.[62]

A partir de estas observaciones resulta que las proposiciones se encajan unas en las otras como lo hacen las clases lógicas, es decir, por sucesivas divisiones dicotómicas. Un sistema de proposiciones puede disponerse en forma de "agrupamiento": A implica una sucesión de proposiciones encajadas B, C, D, ... etc. y es incompatible con las proposiciones complementarias A', B', C', ... etc., respectivamente encajadas también en B, C, D, ... Un sistema de proposiciones constituye pues un conjunto operatorio[63] cuya operación fundamental es la implicación $p \supset q$ siempre reductible a la forma: $p \vee p' = q$.

Se comprende así de qué modo la lógica de las proposiciones que caracteriza al pensamiento formal es una lógica operatoria, pero de segundo grado: las proposiciones a las que se refiere no son sino operaciones, isomorfas a las operaciones concretas, pero generalizadas y expresadas por un conjunto de signos en vez de efectuarse en la acción; y el sistema de las proposiciones es a su vez un conjunto operatorio, puesto que estas proposiciones están, en tanto proposiciones, vinculadas por operaciones interproposicionales, es decir, por operaciones semejantes a las que permiten la construcción de los agrupamientos de clases o relaciones.

Sin embargo, ¿cómo puede el mecanismo de las operaciones formales —que prolonga, del modo más continuo, el de las operaciones concretas y que en consecuencia se ha asociado durante tanto tiempo con proposiciones de contenido "intuitivo" evidente— culminar al final de cuentas en esa inversión de sentido que marca la axiomática contemporánea? La lógica que emplea la axiomática moderna no difiere fundamentalmente, no digamos de la lógica clásica (lógica de los teóricos), sino de la lógica formal espontánea y viva, por lo tanto de esa lógica de las operaciones formales que la logística ha explicitado con el nombre de cálculo de las proposiciones

62 Véase Gonseth: *Fondements*, pág. 228.
63 Véase nuestro *Traité de logique*, punto 39.

y cuyos vínculos con lo concreto acabamos de explicitar: a lo sumo, se ha producido cierto progreso en la formulación, es decir, en la técnica lógica, pero esta técnica no ha modificado con su funcionamiento el razonamiento humano. Ha proporcionado una expresión axiomática en su propio terreno —lo cual es muy diferente— y, en consecuencia, ha refinado en mayor grado el análisis lógico, es decir, la reflexión del pensamiento lógico sobre sí mismo. Sin embargo, no hay más separación entre la técnica lógica y el razonamiento formal espontáneo de los geómetras que entre este pensamiento espontáneo y las operaciones concretas. Entonces, ¿cómo las operaciones formales produjeron finalmente la axiomática geométrica actual?

Comparada con la deducción formal y seudoaxiomática practicada por Euclides y la geometría clásica, el método axiomático de los geómetras contemporáneos presenta esencialmente el nuevo carácter de someterse a demostrarlo todo deductivamente procediendo a partir de axiomas tan elementales como sea posible y a definir todo por medio de términos adoptados como indefinibles; no se limita ya a seguir las implicaciones en su desenvolvimiento progresivo a partir de proposiciones iniciales intuitivamente evidentes, sino que busca analizar regresivamente las implicaciones iniciales disociando cada vez más entre sí las proposiciones elegidas como axiomas. Remontando así a la fuente, a través del análisis reflexivo sistemático, tiene que formular los axiomas, ya no en virtud de su evidencia intrínseca —siendo esta evidencia el último residuo intuitivo heredado de los niveles de pensamiento precedentes— sino en la medida en que pueden servir como soporte para una construcción deductiva tal que no haya vínculo alguno que escape a la formulación. El pensamiento axiomático no constituye de por sí un nuevo sistema de operaciones intelectuales: recoge tal cual la herencia de las operaciones formales, pero las aplica en otra dirección, orientada hacia el origen y ya no únicamente en sentido de la construcción.

Ahora bien, desde el punto de vista de la psicología del pensamiento y la epistemología genética, debe hacerse una comprobación importante respecto de este tema: esta investigación de disección puramente formal de las fuentes, en vez de alejarse de lo que psicológicamente es primitivo —como podría hacer temer la técnica aparentemente artificial de la axiomática— se acerca muy por el contrario mucho más a ello que la axiomática de Euclides basada en la evidencia, pero en una evidencia que constituye en realidad el producto de una larga evolución del pensamiento, en oposición a los puntos de partida reales.

En efecto, por una parte la lógica de Aristóteles (que L. Brunschvicg compara acertadamente con la geometría de Euclides) se encuentra mucho más alejada de los procedimientos del pensamiento real que la lógica moderna (que constituye en su propio terreno una verdadera axiomática), porque la primera sólo se refiere a los conceptos del lenguaje, mientras que la segunda alcanza las operaciones formadoras de estos conceptos. Por ello, las leyes de los "agrupamientos" que pueden formarse mediante estas operaciones son, al mismo tiempo, las leyes de equilibrio del pensamiento, a partir del nivel de las operaciones concretas, y sucede así en particular

con la reversibilidad que dirige toda la evolución de la inteligencia desde el nivel sensoriomotor hasta las operaciones interproposicionales (formales).

Por otra parte, en lo que se refiere a la geometría, los axiomas de Euclides expresan verdades lógicas o métricas adquiridas al nivel de las operaciones concretas y carentes de significación general en los dominios anteriores; en cambio, la verdadera axiomática de los modernos alcanza las raíces psicológicas del espacio, en particular, en el terreno topológico. En su hermosa obra acerca de la *Topologia* Alexandrof y Hopf introducen por ejemplo un conjunto de axiomas sucesivos que conducen, a través de diferentes niveles, desde los conceptos fundamentales hasta un espacio coordinable. Ahora bien, resulta sorprendente comprobar hasta qué punto esta sucesión corresponde al orden genético: se introducen así en primer lugar los "Berührungspunkte", o puntos de contacto, después de ellos aparece la "vecindad", pero aún sin "separación", luego viene la "separación", etc., como si fuera la reconstrucción de la génesis real del espacio en el nivel perceptual y en los niveles ulteriores. Por supuesto, subsiste una diferencia esencial: la cuantificación extensiva de estos conceptos se introduce inmediatamente (con la definición de los puntos de acumulación, etc.), pero, salvo esta cuantificación, esta axiomática puede proporcionar un hilo conductor para la investigación genética; pero las axiomáticas de Euclides, en cambio, sirven, a lo sumo y desde el punto de vista psicológico, para detectar las relaciones que ya son evidentes de por sí a partir de cierto nivel mental y que no lo son en absoluto desde el comienzo.

Ahora bien, esta relativa convergencia entre el análisis axiomático y el análisis genético resulta bien evidente si, como intentamos mostrarlo más atrás (vol. I, cap. I, punto 7), los términos elegidos como indefinibles y las proposiciones elegidas como indemostrables (axiomas sobre los que se apoya la construcción axiomática) constituyen en realidad un núcleo operatorio irreductible, caracterizado por ciertas implicaciones entre operaciones (en oposición a las implicaciones entre proposiciones) y resultantes, en consecuencia, de ciertas abstracciones a partir de las coordinaciones inherentes a las acciones del sujeto. Los axiomas geométricos de Hilbert son en este sentido tan reveladores como los axiomas ordinarios de Peano analizados a propósito del número entero. Cuando por ejemplo Hilbert formula el axioma de orden según el cual, si B está situado entre A y C también lo está entre C y A, es claro que, aun sin recurrir para nada a la "intuición" espacial o temporal y considerando únicamente esta pura simetría formal de la relación "entre" en oposición con la asimetría de las relaciones de sucesión AC y CA, el axioma en cuestión implica de por sí la posibilidad de distinguir entre dos recorridos de la sucesión ABC: ahora bien. si la orientación de un "recorrido" no corresponde a un movimiento en el tiempo o en el espacio supone al menos una operación lógica de enumeración, es decir, una acción orientada cuyas condiciones pueden explicitarse (y que corresponde a una operación concreta bien definida como hemos visto en el punto 7). Asimismo, los axiomas acerca de la congruencia de los segmentos admiten, por ejemplo (ax. III), la posibilidad de transportar, a partir de un punto determinado, un segmento A'B' congruente con un

segmento dado AB lo cual implica la posible reiteración de esta operación; admiten también la igualdad de los segmentos totales A'C' y AC si los segmentos parciales de uno A'B' y B'C' son congruentes con los segmentos parciales del otro AB y BC (ax. IV), lo cual implica una adición partitiva y el establecimiento de una posible correspondencia entre los puntos ABC y A'B'C', así como entre los segmentos comprendidos entre los puntos. Ahora bien, partir de la adición de las partes en un todo, así como de la reiteración del transporte de un segmento (que vuelve a aparecer en la axiomática de Arquímedes, también elegida por Hilbert), es evidentemente partir desde el comienzo de un conjunto ya muy complejo de implicaciones entre operaciones; ello es muy legítimo y no quiebra para nada el rigor de las proposiciones ulteriores fundado en la implicación entre las proposiciones, pero ello es suficiente para que se haga indemostrable, por un método de análisis lógico directo, la compatibilidad de los axiomas admitidos, puesto que estos axiomas implican ya toda la lógica (orden y adición de las partes en un todo) así como la reiteración. Por lo tanto, es evidente que la axiomática geométrica se sustenta en un previo círculo operatorio, que no rompe en absoluto la constitución de metateorías, puesto que ellas introducen nuevos axiomas que se hacen cargo de todas sus implicaciones lógicas propias: este círculo consiste en un conjunto de implicaciones mutuas entre operaciones (en el sentido del punto 7, vol. I, cap. I) y supone, en consecuencia, una sucesión indefinida de abstracciones a partir de las coordinaciones anteriores de la acción del sujeto. Pero, por otra parte, es por ello que el análisis axiomático converge, mucho más de lo que podría esperarse, con el análisis genético.

Aclarado este punto, vemos en qué términos habrá de plantearse, desde el punto de vista genético, el problema central de las relaciones entre la geometría axiomática y aquello que los matemáticos llaman globalmente la "intuición", es decir, el conjunto de niveles comprendidos entre el espacio perceptual y las operaciones formales iniciales. En este sentido, hay que señalar la presencia en los matemáticos mismos, de tres clases de soluciones. Para los partidarios exclusivos del método axiomático, este método se ubica en las antípodas de la intuición y no le debe nada a ella o al menos se esfuerza, con un éxito creciente (cuyo pasaje se extrapola al límite), por no deberle ya nada. Para los empiristas —como E. Borel— y los intuicionistas la axiomática es una traducción a posteriori y siempre algo artificial de los resultados obtenidos previamente por el pensamiento no axiomático, es decir, por la "intuición" sensible o "racional". Por último, para F. Gonseth la axiomática es un "esquema" pero que presenta la particularidad de encontrarse en germen, en grados diversos, en la intuición misma y, por otra parte, siempre permanece algo de lo intuitivo, también en grados diversos, en toda axiomática (al menos, en toda axiomática "eficaz", en oposición a por ejemplo la axiomática de Zermelo que no corresponde a nada en lo real). Generalmente se opone a la axiomática la "intuición" considerada más o menos en bloque, ya para defenderla o bien subestimarla, o bien para ubicarla como ciencia "abstracta" respecto de los métodos intuitivos o experimentales. Gonseth mismo distingue sin duda demasiado

poco entre los diversos niveles heterogéneos de la intuición y no señala suficientemente el aspecto operatorio de las formas superiores de este conocimiento no axiomático del espacio (véase más adelante el punto 11).

Junto con Gonseth aceptamos plenamente el carácter de "esquema" de toda axiomática respecto de la ciencia real correspondiente (ya hemos defendido este punto de vista en cuanto a las relaciones entre la lógica y los mecanismos del pensamiento, y lo volveremos a encontrar en el vol. III, cap. IV). Aunque este término de esquema adquiere todo su sentido respecto de un análisis metodológico, recubre en cambio una serie de problemas desde el punto de vista genético: en efecto, en la medida en que —como lo admite el mismo Gonseth— existe en la "intuición" una serie de niveles diferentes, se trata a la vez de caracterizar en cada uno de ellos, la relación entre las acciones del sujeto y los objetos de esta actividad, y de analizar desde este mismo punto de vista el mecanismo operatorio que hace así posible cada uno de estos niveles. Ahora bien, todo esquematismo presenta dos polos: uno de asimilación a la actividad del sujeto y el otro de acomodación a lo real. En tanto mecanismo asimilador, lo esencial de su construcción radica en una abstracción a partir de las coordinaciones de la acción; en particular, como un esquema axiomático es tanto reflexivo como constructivo, es decir que se remonta tanto a las fuentes como reconstruye el conjunto, el problema consiste entonces en explicar sus conexiones con las coordinaciones anteriores. Por otra parte, como acomodación con lo real, el esquematismo espacial culmina en una adecuación cada vez más general: los esquemas iniciales se centran en la actividad del sujeto y entonces hay que comprender cómo el sujeto logra descentrarlos hasta obtener la construcción de esquemas que se adapten a toda experiencia posible.

Ahora bien, si abordamos las relaciones entre cada nivel, analizadas en este capítulo, y su sucesor, se asiste a un doble proceso que periódicamente se renueva en el curso de cada nuevo pasaje. Se trata del doble proceso que culmina precisamente, al fin de cuentas, en la construcción del "esquema" axiomático. Por una parte, como todo sistema de esquemas constituye un círculo de acciones u operaciones interdependientes, se produce entonces, en el transcurso de cada pasaje de un nivel determinado al siguiente, una ampliación y articulación más móvil del círculo anteriormente más estrecho y rígido, y es en esta articulación que tiende hacia la reversibilidad completa donde se encuentra la explicación de la descentración de los esquemas iniciales; por otra parte, en el transcurso de cada ampliación de los esquemas anteriores, las nuevas articulaciones resultantes vuelven a actuar sobre las coordinaciones iniciales y las integran en el nuevo círculo: por ello el proceso evolutivo siempre es tan reflexivo como constructivo.

De este modo, el punto de partida de cada nivel (que nunca tiene un comienzo absoluto, puesto que las coordinaciones orgánicas preceden a las coordinaciones mentales) siempre está condicionado por un círculo —formado por los conocimientos o las acciones— al nivel considerado, círculo del cual no puede salir el sujeto y al cual sólo consigue ampliar

y agilizar asimilándole nuevos elementos. Este círculo es el resultado de que el conocimiento necesariamente es una asimilación del objeto a las actividades del sujeto, y de que estas actividades constituyen un todo cerrado como el de la organización refleja y orgánica. Todo contacto con el medio (hecho que interesa a toda la epistemología y no sólo a la del espacio), desde la más simple de las sensaciones a las reconstrucciones más "abstractas", es por lo tanto siempre relativo a una acción del sujeto y el esquematismo de estas acciones, aptas para reproducirse y generalizarse, constituye los primeros esquemas espaciales. La diferenciación entre los datos de la experiencia nunca es el resultado (en todos los niveles) de una acomodación de estos esquemas de asimilación, acomodación cada vez más precisa y general, sino que al comienzo apenas si se diferencia de la asimilación misma.

Por lo tanto, resulta claro que los esquemas iniciales se centran en el sujeto mismo y todo el espacio perceptual, y luego sensoriomotor, comienza por corresponder a este egocentrismo espacial. Sin embargo, después de relacionar todo con su propio cuerpo, el sujeto consigue por el contrario ubicarlo "en" un espacio cada vez más descentrado. Esta descentración —que inaugura el espacio sensoriomotor y ocupa toda la elaboración representativa de las relaciones espaciales hasta las operaciones concretas y luego formales— es el producto de la progresiva articulación de los esquemas y la reversibilidad operatoria que marca su equilibrio. El esquema perceptual es esencialmente rígido y estrecho; agilizado y ampliado por el esquema sensoriomotor, culmina en esa primera descentración que es la construcción del objeto y el grupo práctico de los desplazamientos. El esquema imaginado es más amplio, pero aún estático, antes de que su articulación desemboque en las composiciones móviles, transitivas y reversibles del esquema operatorio concreto, y antes que el círculo limitado de estas operaciones concretas conduzca, por último, al de las operaciones formales, es decir, al umbral del esquema axiomático.

Ahora bien, hemos recordado aquí el conjunto de esta sucesión para interpretar la construcción de los esquemas abstractos o axiomáticos porque, asociados por pares, estos niveles de progresiva elaboración del mecanismo operatorio forman una especie de sucesión de relaciones proporcionales y esta sucesión marca la total continuidad de este proceso general de descentración y articulación de los esquemas, así como una gradual ampliación de los círculos constituidos en cada nivel sucesivo. En efecto, puede decirse que los esquemas axiomáticos son a los esquemas formales lo que éstos son a las operaciones concretas; que estas operaciones concretas son a los esquemas intuitivos imaginados lo que ellos son a los esquemas sensoriomotores, etc.[64]: todos los segundos términos de estas relaciones constituyen

[64] Si estas comparaciones pueden parecer extrañas desde el punto de vista de la duración, cuando sólo se considera el desarrollo individual de los sujetos vivos actualmente en nuestras sociedades, basta pensar en la historia sociológica para encontrar períodos de longitudes homogéneas: si bien la axiomática en sentido estricto

un equilibrio móvil y agilizado de las totalidades más estrechas y rígidas representadas por el primer término, y cada pasaje de un nivel al siguiente marca una liberación del mecanismo activo y luego operatorio apoyado en las coordinaciones del nivel precedente.

Por lo tanto, si bien es cierto —como lo suponíamos al comienzo de este punto (y del punto 7, vol. I, cap. I)— que los términos indefinibles y las proposiciones indemostrables que sirven como punto de partida a toda axiomática funden sus raíces en un sistema de operaciones cuyas implicaciones, irreductibles a la formulación explícita y completa, descansan sobre coordinaciones anteriores (como el círculo de las operaciones lógicas de compatibilidad indemostrable, salvo por ellas mismas) los vínculos que unen la axiomática y el pensamiento concreto no deben buscarse en su contenido, es decir, en una correspondencia entre lo "abstracto" y la realidad exterior actual (respecto de la teoría considerada): el vínculo entre lo abstracto y lo concreto se encuentra en la forma, es decir, en el interior del sujeto y, por lo tanto, en la filiación entre las coordinaciones formales axiomatizadas y las coordinaciones de las que proceden genéticamente, ya que en este caso lo "abstracto" es la resultante de una abstracción a partir de las coordinaciones de la acción y no de una abstracción a partir del objeto.

En efecto, el proceso de descentración de los esquemas, en la dirección de la movilidad reversible, obtiene su verdadera significación por el hecho de que corresponden a etapas de la construcción genética que acabamos de mencionar, etapas correlativas en el sentido "reflexivo", es decir, en el sentido de una integración de los esquemas del nivel precedente, pero con reestructuración de sus propias conexiones y abstracción de los elementos generalizables de sus propias coordinaciones. En este punto se marca, lo más claramente posible, la diferencia entre la idea de un simple "esquema", concebido como una adaptación "sumaria" a lo real, y el sistema de los esquemas relativos a la propia actividad del sujeto, ya que, a cada nuevo nivel, el papel de esta actividad es cada vez mayor en el sentido de la necesaria coordinación en oposición a la adecuación experimental. Ahora bien, esta coordinación —que se reconoce por la necesidad hipotético-deductiva de las construcciones (esa necesidad que los idealistas consideran un a priori, cuando en realidad se constituye por un progresivo equilibrio durante el desarrollo y no está dada en su totalidad desde el comienzo)— no es sino la coordinación propia de las acciones del sujeto, presente desde la asimilación más primitiva, pero que se descentra, o se hace reversible, por el proceso que acabamos de examinar y se hace "reflexiva" por el proceso que ahora vamos a describir.

En efecto, nunca una acción está aislada; es imposible que el sujeto asimile un dato nuevo a su actividad sin que intervenga una coordinación anterior. En este sentido, retomemos como punto de partida dos de las

es reciente, las operaciones formales provienen sin duda alguna de los griegos; las operaciones concretas aparecen en las civilizaciones semejantes a la del antiguo Egipto; la intuición imaginada es típica de la "mentalidad primitiva" y la inteligencia sensoriomotriz de las sociedades anteriores al lenguaje, como las de los antropoides.

categorías axiomáticas que utiliza Hilbert en su reconstrucción abstracta del espacio: por una parte, los axiomas de orden y el que vinculábamos antes con la adición partitiva (si los segmentos A'B' y B'C' que constituyen un segmento total A'C' son respectivamente iguales a los segmentos AB y BC, el total A'C' también es igual al total AC).[65] Resulta claro que estos axiomas, aunque indemostrables en el sistema considerado, es decir, precisamente elegidos como primeras proposiciones, se apoyan a su vez, gracias al juego de las "implicaciones no explícitas entre operaciones" (que oponíamos a las implicaciones entre proposiciones), en las operaciones formales de la lógica, de la cual los conceptos de orden y reunión de las partes en un todo son elementos constitutivos necesarios. Sin embargo, las operaciones formales extraen sus materiales, por una abstracción a partir de las coordinaciones anteriores, de las operaciones concretas, al mismo tiempo que combinan nuevamente estos materiales en una nueva forma. En cuanto a las operaciones concretas, ya conocen las composiciones de orden y adición partitiva (véanse puntos 7 y 8) que han formado por una nueva elaboración de elementos tomados (también por abstracción a partir de las coordinaciones anteriores) de las intuiciones imaginadas iniciales. Y estas últimas no las inventaron sino que las reelaboraron a partir de materiales tomados (nuevamente y según el mismo modelo de abstracción implícita) al orden y la partición sensoriomotrices. En cuanto a las composiciones sensoriomotrices, que efectivamente conocen cierto orden que interviene en las sucesiones de movimientos y también cierta partición perceptual, consisten en reconstrucciones, en un nuevo plano, de materiales extraídos de las coordinaciones reflejas (que se apoyan en coordinaciones orgánicas de diversos grados).

Las operaciones de orden y adición partitiva que intervienen en una axiomática tan abstracta como la de Hilbert hunden sus raíces, por implicaciones previas y abstracción a partir de las coordinaciones anteriores, hasta el funcionamiento más elemental de la vida mental y orgánica. Hilbert expresa este hecho cuando habla de un residuo a priori irreductible (véase el punto 6), pero con ello no se hace sino bautizar la dificultad. En realidad, no hay índice genético alguno que nos lleve a considerar los conceptos de orden y partición como preformados o preexistentes en punto de partida de las actividades psicobiológicas: sólo se elaboran muy progresivamente y hemos visto cuán complicada es su construcción en el niño (punto 7). Sin embargo, no se construyen a partir de la nada y sólo consisten en una reelaboración de materiales (formas elementales de orden no reversible, partición imprecisa e irreversible, etc.) que son los únicos presentes de antemano. Además, no se abstraen estos materiales a partir de las coordinaciones anteriores, como sucede con los caracteres dados abstraídos a partir del objeto: las nuevas composiciones se elaboran en la acción sobre los objetos actuales y utilizan, remodelándolos, los esquemas precedentes así diferenciados; la continuidad de este proceso de asimilación es lo que

[65] En lo que sigue sólo analizamos la relación $AB + BC = AC$, independientemente de las congruencias como tales.

vincula constantemente las coordinaciones presentes con el esquematismo anterior. Por lo tanto, hay a la vez construcción no preformada y asimilación a un pasado que vuelve a elaborarse en el transcurso de la construcción, pero no hay un a priori ni un comienzo actual absoluto.

Se concibe entonces cómo el pensamiento axiomático, situado en el extremo superior (actual) de la escala, puede caracterizarse por un progreso reflexivo al mismo tiempo que por su movilidad constructiva. Aun más, se comprende por qué el retorno hacia las fuentes de las axiomáticas modernas presenta dos aspectos correlativos: por una parte, el redescubrimiento de las relaciones espaciales elementales, como por ejemplo las relaciones topológicas, primitivas desde el punto de vista de la génesis y desde el punto de vista de los axiomas; por la otra, la toma de conciencia de las coordinaciones lógicas, que se presentan en forma de círculo del cual el sujeto no puede salir, puesto que no se puede demostrar lógicamente la compatibilidad de los axiomas de la lógica. En el punto 10 volveremos sobre el retorno a los conceptos iniciales. En cuanto al círculo lógico, acabamos de ver cómo se apoya de manera progresiva en el de las coordinaciones motrices y orgánicas. Si, desde el punto de vista estructural, la lógica no es innata sino que se construye de a poco (como lo demuestra todo el desarrollo del niño), no por ello es menos cierto que esta progresiva estructuración no es el resultado del objeto físico, sino de las actividades del sujeto que se aplican a un objeto cualquiera, y que estas actividades son el testimonio, en todos los niveles, de una función invariante de coherencia, que se inaugura con la morfogénesis orgánica y las coordinaciones motrices hereditarias, para continuarse a través de la organización de los esquemas sensoriomotores e intuitivos hasta las operaciones concretas y formales. Ahora bien, el espacio —lo hemos visto en los puntos 7 y 8— no es sino un sistema de acciones y operaciones infralógicas que se refieren al objeto como tal y no a las clases de objetos discontinuos y acciones isomorfas a las acciones y operaciones lógicas y numéricas. La existencia de una lógica necesaria de la cual nunca se podrá escapar, aunque pueda proseguirse su estructuración y dar lugar a nuevos progresos, se relaciona con una reflexión acerca de las condiciones de las actividades mismas del sujeto: ahora bien, estas actividades forman un círculo de esquemas asimiladores y un círculo que proviene directamente de todos los círculos anteriores por sucesivas ampliaciones.

10. La generalización geométrica y el orden de sucesión de los descubrimientos históricos. El doble proceso constructivo y reflexivo que caracteriza a la construcción del espacio permite explicar lo que puede llamarse la paradoja genética de la geometría: el orden de sucesión de los descubrimientos históricos es, en efecto, exactamente la inversa, al menos orientado en sentido inverso, del orden de sucesión de las etapas psicogenéticas.

En primer lugar, observemos que esta inversión de sentido entre la génesis y la historia —que por otra parte también se encuentra en otros dominios— no es general. En el terreno del número, por ejemplo, puede

decirse que la construcción histórica comienza con el número entero positivo antes de descubrir los números fraccionarios y, en particular, los números negativos, así como el niño construye su aritmética. Es cierto que la idea de correspondencia biunívoca, que se encuentra en la fuente del número entero, sólo se ha convertido efectivamente en un objeto de reflexión científica muy tardíamente, lo cual constituye, en este punto particular, una inversión de sentido comparable a la que presenta la historia de la geometría. Sin embargo, esta inversión se refiere aquí a las coordinaciones operatorias formadoras del número y no a los números; en cambio, en el dominio del espacio, las diferentes estructuras espaciales son las que provocan la inversión. En otro dominio, como el de los principios de conservación física de los cuales hablaremos en el cap. 5, hay también correspondencia parcial entre la historia y la génesis: la conservación de la sustancia precede en ambos casos a la del peso, y ésta precede a su vez a la de los volúmenes corpusculares.

Por el contrario, en el dominio del espacio, hemos comprobado la primacía —en el terreno del desarrollo perceptual y en el terreno de la formación del pensamiento— de las estructuras topológicas respecto de las estructuras proyectivas y euclidianas; estas dos últimas aparecen en segundo lugar y en solidaridad entre sí. Ahora bien, desde el punto de vista histórico, la geometría euclidiana precedió por mucho a la constitución de la geometría proyectiva y ésta precedió por mucho al descubrimiento de la topología.

Ya hemos visto por qué el espacio euclidiano se constituye solamente al término de los procesos psicogenéticos. En el terreno de la percepción, supone la constitución de un tipo de métrica perceptual fundada en un invariante relativo (elaborado cualitativamente): la constancia perceptual de las magnitudes a pesar del alejamiento. Ahora bien, la construcción de esta invariante se vincula con la del objeto y el grupo práctico de los desplazamientos. En el terreno del pensamiento, la estructura euclidiana culmina en la medición —es decir, en una síntesis operatoria de las operaciones de partición y desplazamiento— y se reúne así con el número entero y fraccionario que constituye una estructura que culmina paralelamente con la de la aritmética.

A estas circunstancias se debe sin duda que la geometría euclidiana haya obtenido su primacía histórica en el plano del pensamiento formal socializado y haya producido el florecimiento de una investigación científica colectiva. Sin embargo, la consideración de la medición no explica todo y resulta sorprendente que Euclides ni siquiera haya enunciado de modo explícito (sin hablar de los términos topológicos de vecindad, orden, continuo, etc.) los axiomas relativos al desplazamiento y a lo que Helmholtz llamaba la "libre movilidad" de las figuras. Los griegos se concentraban en el objeto y no en la acción, en la figura más que en la operación, es decir, en el resultado de la construcción y no en la construcción misma. Por ello, hay inversión del orden genético, pero esta inversión, en el caso de las relaciones entre la estructura euclidiana y las estructuras topológicas,

se fortalece por el interés otorgado a las consideraciones métricas: se concibe la medición como la expresión de las propiedades del objeto.

La geometría analítica, ya entrevista entre los griegos por Pappus de Alejandría a propósito de su teoría acerca de los lugares, sólo encontró su forma sistemática con la constitución del álgebra, lo cual se entiende claramente pero plantea respecto del carácter tardío del álgebra misma un problema que supera el marco del espacio y que volveremos a encontrar en el cap. 3 a propósito de la toma de conciencia de las operaciones en general.

En cuanto a la geometría proyectiva, genéticamente solidaria del espacio euclidiano, se la hubiera podido descubrir —si lo anterior es correcto— en la época de los griegos y efectivamente Apolonio de Perge la percibió de algún modo en sus trabajos acerca de las secciones cónicas. Su construcción más tardía, vinculada a los comienzos de la geometría moderna (siglo XVI y, en particular, siglos XVII y XVIII) es sin duda alguna el resultado de la primacía inicial del objeto: la perspectiva aparece como una deformación del objeto en función de los diversos puntos de vista del sujeto mucho antes que las transformaciones vinculadas a los diferentes puntos de vista se consideren como tema de una investigación objetiva como cualquier otra. Aquí hay que agregar además la cuestión de la medición, cuyo alcance es secundario en una geometría que no conserva los ángulos y tampoco las distancias. Por el contrario, desde el punto de vista genético, la coordinación de los puntos de vista del sujeto plantea un problema de operaciones concretas tan importante como el de la coordinación de los objetos, y la ausencia de métrica proyectiva accesible al nivel concreto facilita por el contrario el descubrimiento de las relaciones proyectivas (intensivas y extensivas) elementales.

Por último, durante el siglo XIX, aparece el inmenso florecimiento de la geometría y todos sus aspectos son notables en cuanto a la inversión de sentido entre la historia y la génesis, así como en lo que concierne al proceso reflexivo del descubrimiento (proceso cuya prolongación culmina precisamente en las axiomáticas del período contemporáneo).

En primer lugar, frecuentemente se ha trazado la historia del descubrimiento de las geometrías no euclidianas. Después de los trabajos de Wallis (1663) que muestran que el postulado de las paralelas se relaciona con la teoría de las similitudes, de G. Saccheri que intentó probar el postulado mediante la construcción de un cuadrilátero (de tres ángulos rectos y del cual quería demostrar que el cuarto no podía ser ni agudo ni obtuso), después de los trabajos de Lambert (1786) acerca del mismo tema, Gauss, Lobatschevski y Bolyai alrededor de 1830 y luego Riemann mostraron el carácter coherente de aquellas geometrías que no admitían el quinto postulado de Euclides. ¿Cuáles fueron entonces los incentivos de estas investigaciones que tuvieron tal repercusión desde el punto de vista de la epistemología científica y desde el punto de vista de la geometría? Fueron de dos tipos y su correlación efectiva presenta un gran interés genético. El primero es la reflexión regresiva acerca de los principios, que se encuentra en el punto de partida real de la axiomática moderna:

el quinto postulado resiste la demostración aunque sea impuesto por la percepción a una escala de aproximación no refinada y por la intuición imaginada cuyas fallas son habituales; la inversión reflexiva consistió entonces en buscar a qué resultados conduciría una construcción que lo dejara de lado. Ahora bien, a partir de entonces y siguiendo este método, se realizaron muchos descubrimientos resultantes de la eliminación, no sólo de postulados indemostrables, sino de axiomas evidentes: por ejemplo, la geometría no arquimediana de G. Veronese que descarta la relación métrica elemental. Sin embargo, el segundo incentivo, al que responden Gauss y Lobatschevski, completa al primero de modo extremadamente instructivo: sospechando que existía cierto vínculo entre el postulado de las paralelas y cierta escala de aproximación de nuestras percepciones y nuestras representaciones imaginadas, estos geómetras se preguntaron si una escala más precisa —proporcionada por mediciones de triangulación en la montaña o por la determinación de ángulos interestelares— confirmaría el carácter euclidiano de lo real. Esta preocupación no elimina por supuesto en absoluto el carácter anticipatorio del marco matemático no euclidiano respecto de la física moderna, pero muestra de modo bastante preciso que la regresión reflexiva en la dirección de los principios es correlativa a un esfuerzo superior de apropiación del objeto.

La constitución de la teoría geométrica de los grupos (F. Klein, S. Lie, etc.), a través de la toma de conciencia del carácter operatorio de los desplazamientos y las transformaciones en general, en oposición con las figuras estáticas de los antiguos o con su simple expresión analítica y en particular el análisis de lo continuo, punto de partida de la topología y el descubrimiento de los aspectos cualitativos elementales del espacio, constituyen varios testimonios sorprendentes de la inversión de sentido entre la génesis real y el orden de sucesión histórico de los descubrimientos. En efecto, resulta imposible comprender por qué la intervención del concepto de grupo ha aparecido tan tardíamente, ya que se trata de un concepto primero desde el punto de vista de la construcción operatoria real del espacio, y por qué el descubrimiento de los caracteres topológicos ha aparecido luego tantos siglos después en vez de preceder al de las relaciones proyectivas y euclidianas, ya que en realidad son primitivos desde el punto de vista psicológico y axiomático, si no se admite que los procesos formadores de un sistema de conceptos científicos son a la vez constructivos y reflexivos y que la toma de conciencia regresiva acompaña a toda nueva construcción pero en sentido inverso.

Es cierto que queda aún por explicar por qué esta inversión es más importante en el dominio del espacio que en otros dominios: porque (lo hemos visto en el punto 9) la construcción geométrica supone una continua descentración de las estructuras respecto del egocentrismo espacial inicial. Ahora bien, el egocentrismo es inconsciente y la descentración supone una inversión de sentido laboriosa, que procede por el establecimiento de relaciones entre los diversos puntos de vista e inserción de las relaciones aparentes e inmediatas en el sistema de las posibles transformaciones: resulta entonces claro que este tránsito desde los falsos absolutos iniciales a la

relatividad del espacio desempeña un papel particularmente importante en la paradoja genética que anteriormente hemos analizado.

Por ello, no puede satisfacernos un sistema de explicación genética que —como el de Enriques— se sustenta en el análisis de las sensaciones y en la abstracción intelectual a partir únicamente de los datos sensoriales: si la topología corresponde —como se dice— a las sensaciones táctil-musculares generales, la métrica al tacto especializado y la geometría proyectiva a las sensaciones visuales, no se comprende por qué, genética e históricamente, las tres clases de espacios y geometrías no se han desarrollado simultáneamente. Por el contrario, el fenómeno se explica en función de una elaboración activa y operatoria continua, con progresos a la vez constructivos y reflexivos, y descentración indispensable para toda generalización.

Hay algo más. La sucesión histórica de las grandes etapas del pensamiento geométrico revela así la doble naturaleza de un proceso genético circular, que vincula la articulación siempre más extensa y móvil de los esquemas operatorios con una reflexión que siempre alcanza más profundamente a los elementos, en orden inverso al de su integración: ahora bien, el proceso generalizador como tal, presente en las operaciones geométricas, manifiesta la existencia del mismo círculo, y ello no debe sorprendernos puesto que los descubrimientos que jalonan la historia de la geometría son precisamente el resultado de sucesivas generalizaciones.

Poincaré, entre otros, ha demostrado que se pueden construir geometrías no euclidianas con los únicos elementos euclidianos; sin embargo, la geometría euclidiana no es sino un caso particular de este conjunto. La recíproca es verdadera y, basándose en los trabajos de Cayley y Klein, puede reconstruirse el espacio euclidiano mediante elementos no euclidianos. "La paradoja es pues perfectamente simétrica, por ejemplo Gonseth afirma: si tomamos dos de nuestras geometrías —sean cuales fueren— cada una parece alternativamente estar contenida en la otra o contenerla" (*Fundamentos*, pág. 93). Ahora bien, este círculo sería insoportable para la lógica, si no expresara precisamente el doble proceso de asimilación constructiva e incorporación retroactiva de los materiales anteriores en la nueva composición, doble proceso que caracteriza a la construcción operatoria. Contrariamente a la generalización simple, que engloba una ley espacial en una ley más general, la generalización operatoria procede en efecto del siguiente modo. Después de generar un primer sistema, toma de él algunos elementos para construir mediante nuevas composiciones un segundo sistema que desborda al primero y lo incluye como caso particular: la recíproca también es verdadera puesto que, mediante algunos materiales del segundo sistema, las operaciones del primer sistema lo reconstruirán a su vez. Como no se trata de simples implicaciones entre proposiciones, en cuyo caso dos sistemas que se implicasen mutuamente se confundirían entre sí, sino de composiciones efectuadas mediante elementos que no las implican de antemano, estas composiciones forman un círculo tal que se puede pasar de un sistema a otro, según los axiomas que se elijan y sin que sus inclusiones recíprocas desemboquen en una fusión.

Por otra parte, este círculo operatorio termina por abarcar toda la geometría. El grupo fundamental de la topología (grupo de las homeomorfías) contiene, en efecto, como subgrupo, el grupo fundamental de la geometría proyectiva (con conservación de la recta y las relaciones no armónicas) que contiene a su vez como subgrupo el de las afinidades (con conservación de las paralelas); y este último contiene como subgrupo el grupo de las similitudes (con conservación de los ángulos) y, por último, éste contiene como subgrupo el de los desplazamientos (con conservación de las distancias). Sin embargo, este grupo fundamental de la geometría euclidiana se vincula —como acabamos de recordar— con las geometrías no euclidianas y, desde este conjunto, podemos remontarnos al grupo de la "métrica general" que se vincula de modo directo con el de la topología. El conjunto de los grupos operatorios constitutivos del espacio forma así un círculo tal que se puede pasar de uno de los sistemas al otro, ya por adjunción o supresión de uno de los invariantes característicos de los subgrupos.

Por lo tanto, existe una interdependencia completa entre todas las posibles transformaciones del espacio y esta interdependencia es la que manifiesta fuera del círculo las implicaciones entre operaciones previas a toda construcción axiomática. Ahora bien, este círculo constituye —lo hemos visto— la forma más evolucionada de las sucesivas coordinaciones alcanzadas por el análisis genético, del cual es solidaria la axiomática, pero desde adentro y por intermedio de los conceptos operatorios iniciales.

11. La epistemología geométrica de F. Gonseth. La exposición anterior equivale a atribuir la formación del espacio y de las operaciones lógico-aritméticas a la coordinación progresiva de las acciones ejercidas por el sujeto sobre los objetos. En vez de proceder por construcción de conjuntos discontinuos de objetos, fundados en los esquemas lógicos de semejanzas y diferencias (o en los esquemas numéricos que unen en un solo todo la clase y la relación asimétrica), las operaciones espaciales encuentran su punto de partida en la continuidad de las vecindades y las diferencias de orden (y luego de la medición que reúne la partición y el emplazamiento), pero se reúne, tarde o temprano, con las operaciones formales generales que se aplican simultáneamente a la discontinuidad numérica o lógica y al continuo espacial. De este modo, lo formal que se encuentra en la base de las construcciones axiomáticas se desprende de a poco de las acciones y operaciones del sujeto y disocia el espacio geométrico del espacio físico o experimental superando la "intuición" con la que se relaciona a través de todos los intermediarios.

Puede observarse el parentesco existente entre algunas de estas conclusiones y varias de las perspectivas desarrolladas desde hace más de veinte años por F. Gonseth. Antes de concluir, nos parece entonces indispensable tomar posición respecto de la filosofía geométrica y la epistemología en su totalidad de este matemático, y señalar simultáneamente las convergencias y puntos de bifurcación posibles. Esta discusión no sólo nos resultará útil para preparar la conclusión de este capítulo sino que nos introducirá al

mismo tiempo al estudio de los problemas más amplios abordados en el capítulo 3, es decir, al análisis del modo de existencia propio de las conexiones matemáticas.

En efecto, la ambición de Gonseth supera el marco de la epistemología geométrica. Se trata de una teoría del conocimiento científico en general que, como antes el positivismo clásico y luego el de Mach, etc., la gnoseología de F. Enriques y la epistemología genética que aquí defendemos, se ubica exclusivamente en el terreno de las ciencias y su desarrollo sin recurrir a los previos marcos de las filosofías académicas o las epistemologías metafísicas: "concebir en primer lugar las relaciones entre lo abstracto y lo concreto siguiendo el ejemplo privilegiado de la matemática y su aplicación, extender luego esta concepción a todos los órdenes del pensamiento",[66] éste es el camino que se ha de seguir.

En cuanto al método, consiste en primer lugar en descartar dos clases de prejuicios: el de los hechos irreductibles, ya que los progresos del conocimiento físico renuevan sin cesar nuestras percepciones del objeto (*M. R.*, pág. 375) y el de la verdad absoluta (pág. 376), ya que no hay criterio alguno de lo verdadero que no sea a su vez un tema que requiera ser revisado. La reestructuración de nuestras intuiciones más elementales por la microfísica y la crisis de la verdad matemática abierta por Brouwer son así dos "lecciones" que habían de orientar toda la epistemología, poniéndonos simultáneamente en guardia contra el realismo empirista y el realismo platónico. Los conocimientos iniciales siguen siendo esencialmente "someros" y el aumento de los conocimientos consiste en un tránsito desde lo más somero a lo menos somero: sólo existen conceptos "en transformación" y "abiertos hacia su porvenir" (*M. R.*, pág. 28). Esta posición inicial es pues idéntica a la de L. Brunschvicg, por ejemplo (véase más adelante el punto 12 y vol. II, cap. V, punto 7), y a la que aquí defendemos. Sin embargo —situación curiosa— Gonseth que recurre constantemente a la historia de las ciencias y a la psicología del niño, pretende al mismo tiempo romper con el método histórico-crítico de Brunschvicg y el método propiamente psicológico, y ello por dos motivos algo sorprendentes ya que parecen contradecirse. El método histórico-crítico es insuficiente porque "hay un *elemento instantáneo* que la historia prepara y sostiene, pero no determina... Por lo tanto es muy natural preguntarse, antes de recurrir a la historia, cómo se constituyen esos instantáneos cuya sucesión constituye la historia. Ahora bien, esto es justamente lo que no explica la historia" (*M. R.*, pág. 47). Sin embargo, si Gonseth se niega a ver en los "instantáneos" el producto del desarrollo histórico no piensa, para explicarlos, únicamente en la psicología; en efecto: "Ella casi se ocupa únicamente de fenómenos de pensamiento más o menos instantáneos, de ideas simples y breves. Evita las grandes construcciones mentales donde se inscribe todo un pasado de fructuosos esfuerzos" (*Ibid.*, pág. 29). El método de Gonseth

[66] *Les mathématiques et la réalité*. Paris, PUF, págs. 337-338. Designaremos esta obra con las letras M. R.

consistirá entonces en partir del análisis del saber intuitivo, es decir —si lo comprendemos bien— de los conocimientos elementales ni demasiado ni demasiado poco "instantáneos" y buscar cómo se desprende a partir de ahí la abstracción científica.

Conviene distinguir desde el comienzo dos aspectos de la epistemología de Gonseth, aspectos cuyo interés respectivo es, por otra parte, muy diferente: una investigación de los fundamentos de la matemática y el pensamiento científico, y un análisis del mecanismo del pensamiento espontáneo o precientífico, es decir, de las fuentes intuitivas. Estas fuentes son caracterizadas del siguiente modo: "queremos llamar a todo ese conjunto de conocimientos fundamentales e imperfectos, todas esas perspectivas adecuadas, pero sólo de modo aproximado, todas esas ideas inacabadas sobre las que se ejerce nuestra actividad mental *los elementos del conocimiento intutitivo*" (*M. R.*, pág. 15). Sin embargo, la importancia de la epistemología geométrica de Gonseth justifica una discusión de sus ideas acerca del desarrollo mental, ya que en este dominio todas las sugerencias de un matemático, sea cual fuere su grado de conocimiento psicológico, resultan hoy preciosas, tanto más cuanto la filosofía matemática ha dado la espalda a lo concreto, bajo la doble influencia del realismo platónico y el nominalismo lógico.

En su primera obra,[67] totalmente consagrada al análisis del pensamiento matemático y fisicomatemático (y que sin duda alguna constituye lo mejor que ha escrito), Gonseth ya había formulado su tesis central. Por una parte, la matemática procede de la experiencia: la demostración de un teorema, como aquel según el cual se puede, por un punto, trazar una y sólo una perpendicular a una recta, es "una simple descripción apenas idealizada de una experiencia físicamente realizable" (*F. M.*, pág. 4). Ese carácter experimental de la geometría elemental en su conjunto "se hace totalmente evidente con la reflexión" (pág. 4). Aun más "no hay dominio de la matemática, por mínimo que sea, donde la axiomática pueda bastarse a sí misma" (pág. 13). Pero inversamente, la experiencia nunca puede interpretarse, y en el terreno de la matemática menos aún que en cualquier otro dominio, sin la referencia a un "esquema". "Por lo tanto, es imposible probar experimentalmente que el espacio es euclidiano" (pág. 103), ya que "no se experimenta nunca sin alguna idea preconcebida, así como nuestro cuerpo sólo puede moverse en función de las normas intuitivas inscriptas en nuestros centros nerviosos" (pág. 104); estas normas consisten en parte en el grupo experimental de los desplazamientos descripto por H. Poincaré. En resumen, "hay, en la base de toda experimentación, una trama abstracta sobre la que se construye una imagen semejante al mundo", pero "hay, en toda construcción abstracta, un residuo intuitivo imposible de eliminar" (*F. M.*, pág. 105).

Así "la distinción entre lo abstracto y la experiencia sólo es una diferencia de tendencias y no de esencia" (*F. M.*, pág. 107), ya que "nuestra

[67] *Les fondements des mathématiques*. Gauthier-Villars, 1926, que designaremos con F. M.

intuición no es un conjunto cristalizado de reglas inmutables" (pág. 109), y la abstracción se desarrolla nivel por nivel. ¿En qué consiste esta evolución? "Toda ciencia abstracta sólo puede fundarse en el método axiomático... Por otra parte, si uno se remonta bastante atrás, los mismos axiomas escapan al imperio de la lógica formal" (pág. 204). Por lo tanto, debe buscarse la solución en el análisis del proceso de esquematización que constituirá la fuente de la axiomatización como tal, pero a partir de "esquemas" ya presentes en la intuición.

Comienza aquí el análisis contenido en *La Matemática y la Realidad*. La observación nos pone en primer lugar ante una serie de niveles sucesivos. En el punto de partida están los juicios intuitivos elementales, "esbozos aún en constante estado de devenir" (pág. 15) y cuyos "criterios de objetividad son, en última instancia, la conveniencia de nuestros propios fines y el éxito de nuestras acciones", ya que "el pensamiento imita la acción y la acción realiza el pensamiento" (pág. 17). Luego viene la reflexión del pensamiento sobre los conocimientos iniciales, que se convierten a su vez en "objeto de conocimiento" (pág. 18) y a renglón seguido en una jerarquía de juicios sin fin, pero que "se resuelven, por una parte, en juicios intuitivos acerca de la validez o la inexactitud sobre los que no puede existir duda alguna" (pág. 23), dentro de los límites naturalmente de la esfera de la actividad propia de cada uno (pág. 19). Pero, ¿sobre qué se apoya este desarrollo? No sobre una realidad totalmente dada afuera de nosotros, ya que "la realidad *tal como la percibimos* es una construcción más o menos autónoma de nuestro espíritu, cuyos fines esenciales son la posible acción" (pág. 54). Tampoco sobre estructuras *ne varietur* del espíritu, puesto que éste se halla en constante evolución, sino sobre "el proceso mental" mismo que las genera, en correlación con la "construcción de la realidad" (pág. 53). Ahora bien, este proceso mental consiste en una esquematización continua análoga, por ejemplo, a la que constituye la recta, como "imagen somera, esquemática y provisoria" (pág. 59) extraída de nuestra percepción de las aristas de un cristal (aristas cuyo examen microscópico daría una visión totalmente diferente).

La clave del desarrollo mental debería pues buscarse en la esquematización. La esquematización elemental está constituida por las "formas intuitivas" y veamos cómo Gonseth explica la "forma intuitiva relativa a la idea de espacio". Supongamos un autómata que cuenta con un aparato que registra las posiciones luminosas, y un aparato motor "regulado de acuerdo con el aparato visual" que posibilite el movimiento de la mano hasta la fuente luminosa. Añadamos ahora la conciencia humana: "tenemos conciencia de la posición de la fuente luminosa en el espacio. El registro visual, así como la práctica muscular están ambos conectados con un *campo de momentos de conciencia*. Se trata de una *totalidad mental* a la que hay que atribuir una existencia objetiva y cierta estructura" (pág. 63). "En otros términos... el espacio de nuestras representaciones es una realidad puramente mental: es algo así como *la huella sobre nuestra conciencia actual del campo virtual de los momentos de conciencia*" (pág. 63). Y la "forma intuitiva" así construida no es sino el complejo de todos los momentos

de conciencia actuales o virtuales relativos a la idea del espacio" (pág. 63). Por otra parte, "el complejo de los momentos de conciencia vinculado al fenómeno color, abordado en su totalidad, también se llamará *forma intuitiva relativa al color*" (pág. 64). En resumen, las formas intuitivas pueden compararse con "representaciones parciales y esquemáticas de una realidad que, por otra parte, no se presenta de otro modo. Proveen los primeros elementos para la construcción de toda realidad" (pág. 65).

Después de lo cual, "la introducción de los marcos de referencia marca el pasaje de lo intuitivo a lo experimental" (pág. 67), y las variaciones externas pueden entonces concordar con las variaciones del organismo perceptual, a condición de que el organismo sepa "situar el estado actual de este órgano respecto de la totalidad de sus estados virtuales" (pág. 70). El "proceso de esquematización" puesto así en marcha permite entonces la conquista de lo real: "Lo concreto nunca está dado de por sí... Lo real sólo se deja ceñir con la ayuda de lo ideal y lo esquemático" (pág. 72). La más importante de estas esquematizaciones es la que genera la geometría elemental: "Por ello, llamaremos «esquematización axiomática» al proceso mental cuya culminación la constituyen las ideas geométricas. Axiomática porque las primeras relaciones que se perciben entre los elementos de este esquema son los axiomas de la geometría" (pág. 77). Después de lo cual "la introducción de las relaciones lógicas no es sino una nueva esquematización axiomática" (pág. 82). De este modo, las concepciones del punto, la recta, etc., nacidas de la intuición "sólo adquieren su aspecto racional por la axiomatización, es decir por el acto mental que culmina en la creación *del esquema abstracto*" (pág. 88). De modo general, "la idea del orden racional y el método deductivo sólo pueden ser vínculos ideales que imitan de modo esquemático algunos vínculos concretos, algunas leyes profundas de lo real" (pág. 120).

Gonseth explica por el mismo "proceso mental" la idea de número entero y las leyes de la lógica. El número supone la repartición de los objetos "en clases y subclases" (pág. 123) y "cierto orden de sucesión, donde cada objeto sólo interviene una vez" (pág. 124), como permite afirmarlo la observación del niño. Gonseth nos dice que como tal "el número puede compararse con cualquier otra *cualidad sensible*, como lo grande, lo amarillo o lo pesado. Un grupo de objetos tiene la cualidad *tres*, por ejemplo, como uno de ellos tiene quizá la *cualidad rojo* o la propiedad de ser transparente. En una palabra: *el número, en su significación primitiva y en su papel intuitivo, es una cualidad física de los grupos de objetos*" (pág. 127). En cuanto a la lógica, es "la física del objeto cualquiera" (pág. 155). Un estudio subsecuente de Gonseth [68] precisó que no sólo era así sino que además implica un papel normativo, etc. Pero se apoya en su origen en el objeto, es "un abstraído esquematizante" (pág. 161), es decir, una "forma primaria" (pág. 169) del conocimiento, pero construida y no impuesta de modo definitivo (como lo prueba la microfísica). Admitido esto, las relaciones lógicas elementales son las de

[68] *Qu'est-ce que la logique?* París, Hermann.

los objetos entre sí: no expresan "la necesidad abstracta de una lógica dada y formada de antemano, sino las necesidades tales como las presenta el mundo de los objetos físicos, y tales como se presentan en la idea general de *ley natural*" (pág. 170). Sin embargo, además de las "formas matemáticas del objeto, el número y el espacio" (pág. 175), las formas intuitivas relativas a las cualidades del objeto conducen a una lógica del objeto cualitativo: la lógica de las clases de Aristóteles, que se "ha presentado como una teoría abstracta del ser y las esencias cuando en realidad se trataba de un esbozo esquemático de una teoría de este tipo" (pág. 190).

En suma, la existencia matemática plantea "el siguiente dilema: o bien la justificación de las ideas primeras y sus relaciones es proporcionada por su génesis y su evolución; o bien la matemática está condenada a fundar su autonomía sobre lo abstracto", pero "si se descarta sistemáticamente el problema de la adecuación. . .en el momento en que ella se plantea naturalmente, es decir, en el curso de la introducción de las ideas fundamentales, las dificultades descartadas —pero no resueltas— vuelven a aparecer bajo otra forma: la cuestión de las relaciones exteriores que se ha dejado sin respuesta deja simplemente lugar a una cuestión de política interna" (pág. 361).

Hemos insistido en conceder un lugar extenso a la exposición de esta epistemología matemática, porque el punto de vista genético al que recurre Gonseth para explicar la adecuación del espacio y el número a la realidad física converge en principio con el que aquí defendemos. Por lo tanto, tiene cierta importancia intentar determinar si la teoría de la esquematización propuesta basta para cumplir con el programa trazado, en particular, en lo que se refiere a la formación del espacio.

En este sentido, conviene abordar separadamente las reflexiones que se refieren al fundamento de la matemática en general y las perspectivas de Gonseth acerca del proceso genético mismo. En el primer terreno, no podemos dejar de estar de acuerdo con el modo, a la vez sutil y vigoroso, con el que retomó y desarrolló las tesis de Poincaré y Brunschvicg acerca de la naturaleza psicológica de las ideas científicas iniciales en oposición, a la vez, con el realismo platónico o el formalismo lógico y con el empirismo. Las ideas esenciales según las cuales la abstracción y lo concreto siempre son interdependientes, como lo son el esquematismo y lo real correspondiente, no pudiendo aislarse ninguno de estos dos términos en ningún nivel de desarrollo, y según las cuales la axiomática más depurada no es nunca sino el resultado de un proceso reflexivo que prolonga el esquematismo mental mismo, ha renovado de modo sorprendente la gran tradición psicogenética respecto de la eterna cuestión acerca del fundamento de la matemática.

Con ello señalamos hasta qué punto concordamos totalmente con Gonseth en cuanto a su posición del problema y al pensamiento esencialmente genético, crítico y antimetafísico que anima su epistemología. Sin embargo, ¿puede considerarse que el problema del origen "intuitivo" queda resuelto por la concepción particular de la esquematización y las "formas

intuitivas" defendidas por este matemático? Este punto delicado nos produce cierta incomodidad ya que, después de todo, no es la culpa de F. Gonseth si en 1926 y 1936 —fecha de la aparición de sus dos principales obras— la psicología del niño, a la que recurre tan a menudo, no podía proporcionarle lo que de ella esperaba en cuanto al desarrollo del espacio, el tiempo, el número y, en particular, las operaciones lógicas. Resulta así interesante observar las fluctuaciones de su pensamiento en cuanto al aporte de la psicología a la epistemología. En 1926 (*F. M.*, pág. 105) observa, respecto de las relaciones entre lo intuitivo y lo abstracto que "estas cuestiones, cuyas raíces se hunden por una parte en la psicología son extremadamente complejas". En 1936, decepcionado sin duda por la falta de indicaciones precisas de la psicología experimental, formula los desilusionados propósitos mencionados más atrás (*M. R.*, pág. 29), como si las investigaciones genéticas evitasen las "grandes construcciones mentales". En cambio, en 1944, tranquilizado por la obtención de algunos resultados, otorga al psicólogo el siguiente codificado que resulta de mucho valor por provenir de un especialista en axiomática: "Cierta concordancia de tendencias, cierto paralelismo de perspectivas entre el genético y el filósofo del conocimiento se convierte así —situación quizás imprevista— en una condición sine qua non de la legitimidad de la sistemática de este último: la genética se convierte entonces en el juez de la autenticidad de la filosofía".[69]

Por lo tanto, no deberíamos insistir sobre la psicología de partida de F. Gonseth, tanto más en la medida en que se ha modificado claramente su punto de vista inicial y que no se le puede pedir a un matemático que sea al mismo tiempo un psicólogo experimental (por otra parte, todos sabemos cuán verdadera es la recíproca). Sin embargo, por más *amicus Gonseth, magis amica veritas*, se plantea un problema de principio en cuanto a los métodos y el porvenir mismo de la epistemología científica.

Y este problema es el siguiente. Una vez fuera del marco de la deducción matemática y lógica, ¿puede realizarse el análisis del pensamiento intuitivo, la percepción, la motricidad y todo lo que condiciona el "proceso mental" que conduce a lo abstracto, por lo tanto a la "esquematización misma", de otro modo que mediante los métodos precisos de la neurología y la psicología genética, sin hablar de la sociología etnográfica y la historia? Si es así, volvemos a caer inevitablemente en la pura discusión de concepciones o en el simple análisis reflexivo, y la epistemología científica —que pretendía cuidarse de la filosofía académica— se convierte ni más ni menos que en una filosofía más (tememos que Gonseth se desliza sobre esta pendiente apenas bautiza su sistema personal, ya que aunque el "idoneísmo" fuera la ausencia de todo sistema, el solo hecho de mencionarlo despierta la sospecha de que sea lo contrario). Si no, hay que dirigirse exclusivamente al estudio de los hechos y no a la construcción

[69] F. Gonseth: "Psychologie et logistique (à propos de l'ouvrage récent de J. Piaget: classes, relations et nombres)", *Archives de Psychologie*. Ginebra, t. XXX, 1944, pág. 199.

conceptual, por más concreta e inteligente que sea. Ahora bien, es muy claro que este estudio experimental, que la psicología genética convierte en su especialidad, no sólo apunta al análisis de las "grandes construcciones mentales" que constituyen el desarrollo individual y colectivo del pensamiento, sino además y sobre todo abarca tanto lo "instantáneo" como el desarrollo. Por otra parte, ¿no se trata acaso de una actitud algo precrítica el querer aislar lo instantáneo? y ¿un "proceso mental" es verdaderamente una sucesión de estados "instantáneos"? Si con ello quiere decirse estados de equilibrio, el objeto de la psicología genética consiste precisamente en darnos una descripción de la constitución progresiva. Si simplemente se hace alusión a un estado cualquiera, la victoria del análisis moderno sobre los argumentos de Zenón encuentra un parelelo en el campo de la psicología.

Dicho esto, una primera comprobación se impone respecto de la reconstrucción "esquemática" del desarrollo mental que nos ofrece Gonseth: de hecho, ya está todo presente desde el comienzo, y el modo de construcción al que recurre es más una explicación gradual de lo que implícitamente está contenido en lo elemental que una construcción real. En efecto, ¿qué es la "forma intuitiva" presente en el origen de todo proceso de esquematización? Es "la huella en nuestra conciencia actual del campo virtual de los diversos momentos de conciencia" (*M. R.*, pág. 63), campo que comprende "la totalidad de sus estados virtuales" (pág. 70). Sin embargo, ¡quien concibe a un ser suficientemente bien dotado como para tomar cuenta de todo el campo perceptual virtual en cada una de sus percepciones está, de antemano, en estado de resolver el conjunto de los problemas de la deducción y la axiomatización! No por ello deja la fórmula de presentar interés, ya que es evidente que esta intervención de lo virtual marca el pasaje de la percepción pura a la actividad inteligente (sensorio-motriz o reflexiva); pero este pasaje, en vez de ser instantáneo, tarda cierta cantidad de años, ya que psicológicamente se trata de conquistar poco a poco el control de lo virtual. En el terreno de la percepción visual, por ejemplo, es fácil mostrar que los niños de 5-7 años sólo perciben en grado mínimo en función de lo virtual, puesto que a veces *ven* (no juzgan por razonamientos, sino que ven en el sentido estrictamente perceptual del término) tres objetos separados entre sí por ciertas distancias como si mantuvieran simultáneamente las relaciones $A = B$, $B = C$ y $A > C$; estando B situado entre A y C perciben la igualdad $A = B$, así como la igualdad $B = C$, pero cuando comparan directamente A con C perciben la relación $A > C$ sin preocuparse por los desplazamientos virtuales del medio término B. En cuanto a la coordinación entre las localizaciones visuales y la motricidad aceptada por Gonseth —por otra parte con la misma generosidad que Poincaré—, resulta claro que su significación epistemológica depende esencialmente de cómo se la elabora: según que se la conciba como innata (y en este caso se trataría también de saber si es el resultado de una mutación fortuita, por influencia del medio, etc.), como adquirida únicamente en función de la experiencia, o como resultado de una interacción de elementos innatos y adquiridos se culminará en una idea totalmente diferente del esquematismo espacial. Por lo tanto, no basta recurrir a esta

coordinación como hecho comprobable para extraer de ahí una teoría de la esquematización, sino que se trata de determinar su mecanismo genético. Ahora bien, todo parece indicar —en nuestro estado actual de conocimientos— que el aspecto sensorial desempeña en estas coordinaciones esencialmente un papel de señalización y, en cambio, el aspecto motor sería determinante: el pasaje de lo motor a la operación constituye entonces el verdadero problema de la constitución de la intuición del espacio y no puede resolverse fuera de un análisis psicogenético que describa con precisión las etapas reales de este desarrollo.

Henos aquí ante la cuestión central de la epistemología geométrica de Gonseth: ¿cuál es la significación de la idea de "esquema"? Fiel a su método de aproximaciones sucesivas, Gonseth tiene cuidado en no encerrarse en una definición, y si le preguntáramos por qué no ha circunscripto de modo limitativo el empleo de este concepto, sin duda nos respondería que pretende respetar el imprevisible porvenir del esquematismo y no caer en una construcción conceptual. Nos ubicaremos exclusivamente en el terreno del desarrollo y solicitaremos una elección, o una conciliación, entre las dos posibles significaciones —genética y epistemológica— muy diferentes de este término esencial, que casi aparece en todas las páginas de la obra de Gonseth: en efecto, o el "esquematismo" es un "esquema", en el sentido de una estructura inherente a la actividad sensoriomotriz o intelectual del sujeto, o es una imagen esquematizada de un objeto, de un conjunto de de objetos de un sector cualquiera de la realidad, o bien es ambas cosas al mismo tiempo. Sin embargo, si es uno o bien la otra, no se puede pasar de un sentido del uno al sentido de la otra, y si es uno y la otra, se trata de comprender por qué reúne estos dos sentidos y, en consecuencia, hay que analizar la relación entre los factores que interfieren en su elaboración.

Por nuestra parte [70] llamamos "esquema" de acción u operación al producto de la reproducción activa de las acciones de todo tipo, desde la conducta sensoriomotriz hasta la operación interiorizada, y se trate de acciones simples (por ejemplo, el esquema de prensión) o bien de coordinaciones entre acciones (por ejemplo, el esquema de la reunión o la seriación). Definido de este modo en función de la actividad del sujeto, el papel del "esquema" consiste esencialmente en asegurar la incorporación o la asimilación de nuevos objetos a la acción misma; y esta acción, por su repetición en condiciones renovadas y generalizadas, adquiere por este hecho mismo un carácter esquemático. El esquema, que necesariamente se aplica a una materia dada, es además susceptible de acomodación y sus sucesivas acomodaciones producen efectivamente conocimientos "someros", sujetos a constantes revisiones —como dice en efecto Gonseth—. Este esquematismo asimilador puede explicar entonces todo aquello que Gonseth atribuye a los "esquemas", pero a condición de precisar que la acomodación de todo "esquema" a una realidad exterior se apoya en una previa asimilación.

[70] Véase *La naissance de l'intelligence chez l'enfant*. Delachaux et Niestlé. Véase nota 32.

Ahora bien, si en el esquema se distinguen estos dos polos —de asimilación y acomodación, uno fuente de coordinaciones y el otro de aplicación a los datos de la experiencia—, nos encontramos, no solamente ante un único tipo de abstracción sino ante dos clases muy distintas de abstracciones, y pensamos que ellas son las que precisamente distinguen todo aquello que opone el "esquema" (en el sentido de la imagen-trama de una realidad perceptible) al "esquema" como expresión de la actividad del sujeto. Tenemos, en primer lugar, la abstracción a partir del objeto que consiste en extraer, a partir de él, caracteres más o menos generales (el color, etc.) que proporcionan la materia de ese conocimiento sumario y esquemático resultante de la acomodación más o menos profunda de los esquemas de asimilación. Sin embargo hay, en segundo lugar, una abstracción a partir de la actividad del sujeto: este segundo tipo de abstracción consiste en la disociación entre aspectos particulares de la acción considerada y ciertos mecanismos de coordinación generales (por ejemplo, reunir dos acciones en una sola, invertir las acciones, etc.) y la construcción de nuevos esquemas a través de los elementos así extraídos (es decir diferenciados) de las acciones como tales.

Vemos de entrada la importancia que adquiere esta distinción respecto de la construcción del espacio, ya que las dificultades propias de la epistemología de Gonseth son sin duda alguna el resultado de su constante tránsito de un sentido al otro, cuando se trata en realidad de explicar los "esquemas" lógicos, numéricos o específicamente espaciales. Cuando Gonseth nos dice por ejemplo que la lógica elemental es, entre otras cosas, una "física del objeto cualquiera", ¿no se debe acaso precisar antes que la coordinación de las acciones es la que posibilita la constitución de esta física, dicho de otro modo, que constituye más bien una "acción sobre el objeto cualquiera"? Ahora bien, la diferencia es apreciable ya que, si bien se construye el concepto de objeto —como sostiene Gonseth— y no está dado de entrada en su totalidad, es claro que las coordinaciones entre las acciones que intervienen en esta construcción constituyen para la lógica un punto de partida anterior a las combinaciones de las relaciones entre los objetos, es decir, a los resultados de esta construcción misma. El objeto es un "abstraído esquematizado" antes de ser "esquematizante", y se hace necesario recurrir en primer lugar a la coordinación de las acciones que han esquematizado lo real en objetos (lo cual vuelve a llevarnos a las dificultades señaladas más atrás respecto de la génesis de las "formas intuitivas").

Hay algo más. Gonseth establece esa asimilación paradojal del número intuitivo a una "cualidad física" —como el color, el peso o la transparencia— porque no puede distinguir la abstracción del objeto y la abstracción de la acción. Cabe pensar que esta sorprendente opinión es el índice de que el sistema de Gonseth, proveniente de una idea del "esquema" semejante al "esquema" de acción pero sin señalar suficientemente el aspecto activo y operatorio de todo esquema (en todos los niveles de la evolución), se ha deslizado en dirección del esquema concebido como imagen simplificada o como trama de la realidad exterior. Ahora bien, si la psicología puede prestar un mínimo servicio a los matemáticos, es cuando les

demuestra que la acción de reunir "en clases y en subclases", así como la acción de seriar —acciones a las que Gonseth recurre para explicar la construcción del número— tienen un carácter muy diferente de la percepción de un color o un peso: son esencialmente motrices, en oposición a las imágenes cualitativas susceptibles de servirles como señales o símbolos, y no extraen el número a partir del objeto, a semejanza de cómo la visión o el acto de levantar pesos extraen del objeto el color y el peso, sino que le imponen un esquema de enumeración que, una vez convertido en movil y reversible, genera las operaciones axiomatizables.

En cuanto a lo que sucede entonces con el espacio operatorio mismo, es claro que lo esencial de la oposición entre, por una parte, el realismo físico y, por la otra, la actividad deductiva volverá a encontrarse en el interior del concepto de "esquema" puesto que el esquema geométrico, así como los esquemas numéricos y lógicos, puede considerarse alternativamente como una imagen "sumaria" abstraída de los objetos y como un esquema de operaciones, elementales o axiomatizadas, extraída de la coordinación de las acciones ejercidas sobre estos objetos. El gran servicio prestado por la epistemología geométrica de Gonseth consiste en haber atenuado la virulencia de este conflicto entre el empirismo y el formalismo en el punto mismo donde parecía constituirse como un obstáculo a toda conciliación posible, es decir, en el terreno de las estructuras superiores del pensamiento geométrico. Sin embargo, solamente se ha desplazado el problema y se lo encuentra nuevamente en el dominio del pensamiento "intuitivo", es decir, de todo el desarrollo intelectual anterior a la etapa final de axiomatización.

En resumen, cabe pensar que subsisten, en la epistemología de Gonseth, dos dificultades. La primera es que, por carecer de una posición genética suficientemente clara, el "esquematismo" sigue siendo demasiado estático y deja pasar de lado aquello que constituye lo esencial del funcionamiento de los esquemas sensoriomotores e intelectuales: la transformación de la acción en operaciones mediante el juego de las coordinaciones reversibles. De donde surge, en segundo lugar, la asimilación un poco rápida de lo lógico y lo matemático a lo físico, mientras que el punto de vista operatorio conduce a la distinción de dos planos diferentes en las acciones que el sujeto ejerce sobre lo real: las coordinaciones como tales, que generan la lógica y la matemática y las acciones particulares, diferenciadas según los diversos campos cualitativos del objeto y que constituyen el punto de partida de los conocimientos físicos. Ahora bien, la mejor prueba de que uno no puede escapar a esta distinción es que el mismo Gonseth se ve obligado a reconocer una dualidad entre las "formas matemáticas" y las cualidades físicas (*M. R.*, págs. 175-176) y, en particular, entre la "analogía" principio de deducción y la causalidad (pág. 306). "La condición para que nuestra intervención sobre el mundo natural sea eficaz radica en que las reglas intrínsecas del entendimiento han de tener como significación externa la de las leyes naturales" (pág. 307): el reconocimiento de este dualismo muestra suficientemente la necesidad de asegurar su explicación a partir ya de los procesos formadores del esquema de

acción. En total acuerdo con la epistemología de Gonseth, en la medida en que vincula la formación de las axiomáticas con las leyes del desarrollo mental en su totalidad, pensamos que encontramos una explicación de este desarrollo, más adecuada al objetivo perseguido, en la teoría de los esquemas de acción y el pasaje de la acción a la operación. Ahora bien, esta posición del problema puede conducir a una total inversión de las relaciones ordinariamente establecidas entre la geometría y lo real: en la medida en que las coordinaciones elementales recurren a mecanismos propiamente hereditarios (y Gonseth no niega en absoluto su eventualidad), el vínculo entre las operaciones lógico-matemáticas y el mundo externo puede asegurarse, en primer lugar, desde adentro por intermedio de la organización viva que se halla, a partir de sus formas más elementales, en interacción con la realidad física, sin que sea necesario asimilar la experiencia lógica y matemática a la experiencia física del individuo. Esta conexión interior entre el espíritu y el universo que se establece a través de los mecanismos más fundamentales de la morfogénesis vital, es la única que sin duda alguna da cuenta de las posibles anticipaciones del conocimiento lógico-matemático respecto del conocimiento físico, y estas anticipaciones seguirían siendo inexplicables si los "esquemas" matemáticos se construyeran simplemente a posteriori, en función del contacto actual y exterior de la acción con los seres materiales.

12. Conclusión: el espacio, el número y la experiencia: la interpretación de L. Brunschvicg. Como recordábamos al comienzo de este capítulo, nada parece más diferente del sentido común que el espacio y los seres logicoaritméticos, puesto que este sentido común localiza el espacio entre los objetos y las clases o porque los números parecen expresar únicamente colecciones de objetos artificialmente construidas. Que el espacio se vincule con el objeto y que las operaciones lógico-aritméticas se apliquen a los conjuntos de objetos, es un fenómeno que nos confirma el análisis genético. Sin embargo, la gran ilusión del sentido común radica en creer que uno se instala en el objeto o que se capta el objeto por vías más directas que la construcción de las reuniones de objetos. Ahora bien, genéticamente, la idea general de objeto se elabora exactamente del mismo modo que las colecciones de objetos y esta construcción no es ni más fácil ni anterior en un caso que en el otro. El lactante no cuenta con la concepción de la permanencia de los objetos como tampoco tiene la de la conservación de las totalidades de elementos perceptualmente comprobadas, y las etapas de estructuración del objeto espacial complejo son exactamente las mismas que las de la estructuración de las operaciones lógicas y el número.

Al nivel perceptual, no hay espacio único, así como tampoco las colecciones discontinuas, percibidas como pluralidades más o menos ricas, constituyen clases lógicas o números. Al nivel sensoriomotor, los desplazamientos unidos a las percepciones permiten ciertas coordinaciones que se organizan en un espacio próximo, con conservación práctica del objeto pero sin

espacio representativo que vaya más allá de los límites de la acción: asimismo, los esquemas sensoriomotores constituyen el equivalente práctico de los conceptos lógicos, con un esbozo de cuantificación (repeticiones acumulativas, etc., cuyos ritmos permiten algunas estimaciones cuantitativas en la acción), pero también sin representación alguna. Al nivel del pensamiento intuitivo preoperatorio, se constituyen imágenes espaciales estáticas y la imaginación de algunas acciones relativas a las posibles transformaciones de los objetos, pero sin conservación ni reversibilidad algunas: desde el punto de vista de la lógica y el número, aparecen también intuiciones preconceptuales y prenuméricas, pero sin conservación de los conjuntos ni posible inversión de las configuraciones. Al nivel de las operaciones concretas, las primeras operaciones transitivas y reversibles se organizan en el dominio del espacio, en forma totalmente isomorfa a las primeras operaciones lógico-aritméticas. Por último, al nivel de las operaciones formales una lógica formal e hipotético-deductiva abarca simultáneamente las transformaciones espaciales y numéricas.

Este estrecho paralelismo genético conduce a una interpretación muy simple: el espacio es el sistema de las transformaciones interiores al objeto, si por objeto se entiende una totalidad única considerada en función de la vecindad de sus elementos; en cambio, la lógica y el número constituyen el sistema de las transformaciones que se aplican a las colecciones de objetos (a las relaciones entre objetos), considerados estos objetos como constantes y caracterizados por sus semejanzas o sus diferencias independientemente de sus vecindades. Resulta así que desde la acción elemental y desde el punto de vista del número, algunas piedritas son unidades "distintas", es decir independientes entre sí e invariantes, y las operaciones aritméticas las reúnen y ordenan a la vez (o la clase simplemente las reúne y las relaciones asimétricas las serian); por el contrario, desde el punto de vista del espacio las mismas piedritas son los elementos de un objeto único, elementos relacionados por relaciones interiores a la figura que forman en su totalidad: vecindad, separación, etc.; o distancia, posición en función de ejes de referencia, etc.; o también perspectiva, etc. Si las piedritas se desplazan, su cantidad sigue siendo la misma, pero el objeto total que forman o "figura", y sus transformaciones constituyen las relaciones espaciales como tales. A partir de entonces, si el número aparece como el producto de las operaciones lógico-aritméticas, es decir de las operaciones que se refieren a las semejanzas (clases), o a las diferencias (relaciones asimétricas), o bien a ambas simultáneamente (clase y relaciones asimétricas fusionadas en sistemas de unidades numéricas), el espacio debe también concebirse genéticamente como el resultado de las operaciones infralógicas que se aplican a las transformaciones del objeto. Sin embargo, estos dos sistemas de operaciones, aunque distintos y aunque se traduzcan finalmente en un sistema único de proposiciones axiomatizables, son constantemente isomorfos: la partición del continuo y la reunión de los envolvimientos topológicos corresponde al encaje de las clases lógicas; las operaciones de orden (emplazamiento y desplazamiento) corresponden a

las operaciones de seriación lógica y la medición, síntesis de las dos precedentes, se construye paralelamente al número mismo, síntesis de las agrupaciones de clases y relaciones asimétricas.

Ahora bien, presenta un gran interés comprobar que este estrecho parentesco genético concuerda totalmente con el paralelismo de los conceptos matemáticos. El número entero, por un lado, y el continuo espacial, por el otro, constituyen los dos polos del pensamiento matemático, polos entre los cuales una serie de intercambios crecientes tejen una serie inextricable de simetrías y reciprocidades. El número proporcionó al espacio el detalle de su métrica, pero el espacio le ha pagado con el número irracional, destinado a construir numéricamente un continuo que corresponda al continuo espacial. El cálculo infinitesimal se inspiró en las transformaciones espaciales poco después de que la geometría analítica hubiera recibido del álgebra el medio de transformar las curvas en ecuaciones. El dominio del número prestó a la topología el uso de la teoría de los conjuntos, y la topología respondió con una promesa de topologización de la teoría de las funciones. En cuanto a los fundamentos de la matemática, hay una escuela —de Kronecker a Brouwer y a Weyl— cuyo ideal se concentra en la aritmetización de la matemática; en cambio, otros autores consideran el continuo espacial como fuente de todos los progresos. En resumen, el continuo y el número entero aparecen como dos realidades independientes, pero cuyas relaciones culminan en una íntima interacción.

Por lo tanto, desde el punto de vista de la embriología de los conocimientos y desde el punto de vista de su estado de culminación provisoria en el período de la historia de las ciencias que hoy vivimos, nos hallamos ante un dato fundamental que se constituye como testimonio de la unidad del pensamiento matemático en su doble conquista del objeto y las colecciones posibles de objetos, y de la propiedad esencialmente operatoria y asimiladora del espacio y el número. El paralelismo entre estas dos clases de esquemas operatorios es tal que puede facilitar la discusión final que debemos ahora abordar en cuanto a la situación del espacio en las interacciones entre el sujeto y los objetos, en otros términos, en las interacciones entre la construcción activa o deductiva y la experiencia.

Respecto de este punto, podemos partir de las conclusiones de L. Brunschvicg presentadas en su célebre análisis acerca de las "raíces de la verdad geométrica".[71] Hasta aquí nos hemos referido muy poco a la posición que ha tomado este filósofo cuya penetración genética e histórico-crítica sólo se iguala con su penetración matemática. Sin embargo, fue así porque nos sentíamos demasiado cerca de sus tesis como para examinarlas desde afuera: el papel fundamental que nuestro maestro Brunschvicg atribuye, en la génesis del espacio, a las operaciones concretas —como la práctica del dibujo, que genera la concepción de contorno del objeto y las figuras en general, el enfoque que determina la línea recta, las rotaciones y traslaciones, etc.— desempeña un papel importante en la investi-

[71] L. Brunschvicg: *Les étapes de la philosophie mathématique*, cap. XXII.

gación sistemática que hemos intentado llevar a cabo respecto del desarrollo de las representaciones espaciales en el niño, y sus opiniones acerca de este punto han mostrado ser muy concordantes con los resultados de la experiencia. "Es claro que no hay otra percepción efectiva del espacio que la de los cuerpos que lo llenan", sostiene en primer lugar Brunschvicg (pág. 498), de donde surge el papel decisivo de la acción: "Nuestra acción tiende una red de objetividad bajo los estados de conciencia" (pág. 499). La acción constituye así una "red de sensaciones" respecto del movimiento, "y esta red, precisamente porque es el objetivo logrado, en oposición a los medios que pone en funcionamiento y a los movimientos voluntarios que se han realizado, es *el objeto*" (pág. 500). ¿En qué consisten entonces estas acciones, formadoras del espacio? En primer lugar, se trata del dibujo que fija "la indeformabilidad del contorno" (pág. 501): "por más paradójico que este enunciado pueda parecer no es a través de la contemplación del objeto que se ha podido plantear como regla de verdad la inmutabilidad del contorno, sino a través de la acción ejercida para reconstituir artificialmente su aspecto" (pág. 502). Luego, se trata del enfoque que genera el alineamiento rectilíneo (págs. 503-4). Y en particular se trata del desplazamiento —si como decía Montesquieu, antes de que se trazasen los círculos los radios fueran iguales, es simplemente porque "la igualdad de los radios, inherentes al movimiento de rotación de la recta generadora, es constitutiva del círculo" (pág. 505). Asimismo las paralelas se generan por la traslación de una varilla recta en el eje de su longitud (pág. 506), etc. "Vemos ahora a través de qué gradaciones el espíritu posibilita la constitución de la experiencia aritmético-geométrica que ha convertido a la ciencia de la medición espacial en la base de una ciencia universal" (pág. 507).

Sin embargo, ¿en qué consiste esta "experiencia"? "La sugestión de la experiencia es necesaria para la constitución del espacio; pero la experiencia no es suficiente para aportarnos de por sí un espacio constituido". Ya que "lo que vemos está en el espacio; pero no vemos el espacio. El lugar de toda intuición no es en absoluto objeto de una intuición. El espacio encuentra su raíz en la experiencia; y su culminación en la razón" (pág. 514). El espacio es entonces el "producto de la colaboración entre el espíritu y las cosas" (pág. 520), pero se trata de una colaboración en la que "no hay que concebir a los colaboradores fuera de la obra de la colaboración" (pág. 521).

Sin embargo, estas fórmulas, a las que no podemos dejar de adherir en su totalidad, son consideradas finalmente por L. Brunschvicg en el sentido de una asimilación completa de la experiencia geométrica a la experiencia física. Nos parece que se trata de concentrar la discusión en este punto y preguntarnos si el papel de la acción y la experiencia necesariamente genera esa consecuencia realista de aquello que se ha denominado frecuentemente el idealismo brunschvicgiano.

En el capítulo 1 tuvimos que admitir que las estructuras lógicas y numéricas no se abstraían del objeto del mismo modo que las relaciones físicas, sino que eran el resultado de la coordinación de las acciones del

sujeto ejercidas sobre las colecciones de objetos. En efecto, en todos los niveles de la conducta las acciones efectuadas sobre los objetos suponen una previa coordinación entre los esquemas de asimilación, así como el organismo no podría asimilar el medio externo y, en consecuencia, reaccionar sobre él si no fuera él mismo un proceso cíclico que imprimiera su forma a las sustancias y energías externas que con él interactúan. Desde los esquemas sensoriomotores a las operaciones reversibles, esta coordinación de las acciones es la que permite las clasificaciones, el establecimiento de relaciones y, en consecuencia, las cuantificaciones y enumeraciones resultantes de la síntesis de estas dos clases de estructuras. Ello no significa en absoluto que la lógica y el número entero están preformados de antemano como estructuras a priori en la constitución mental del sujeto: no existen estructuras a priori, ya que todas las estructuras son el resultado de una construcción. Sin embargo, toda estructuración implica un funcionamiento anterior a ella, ya que si no existe un funcionamiento continuo, vinculado en su punto de partida con la organización biológica misma, no hay acción alguna que sea posible (esta organización plantea entonces a su vez un problema epistemológico que no trataremos aquí y que volveremos a encontrar el vol. III de esta serie. Este funcionamiento se prosigue a través de estructuras sucesivas; cada una de estas estructuras extrae sus elementos por una especie de abstracción de las estructuras precedentes y, al mismo tiempo, los reagrupa en una forma de equilibrio superior. Esta abstracción, a través de la cual se extraen los seres lógicos y aritméticos, es una abstracción a partir de la acción o incluso de las coordinaciones de la acción y hay que distinguirla cuidadosamente de la abstracción a partir del objeto, ya que no equivale a considerar la acción como un objeto sino que se limita a extraer del objeto (por la simple continuidad del proceso de asimilación) sus elementos operativos y no las cualidades, sean las que fueren: así, los esquemas sensoriomotores superiores extraen de los esquemas iniciales (reflejos y perceptuales) sus posibilidades de anticipación y reconstitución parciales, y las prolongan y reagrupan en conductas de rodeos y retornos; así, los esquemas intuitivos retienen de los esquemas sensoriomotores sus asimilaciones y acomodaciones imitativas y las prolongan en representaciones imaginadas articuladas en mayor o menor grado y así los esquemas operatorios abstraen de los sensoriomotores sus articulaciones y las prolongan en composiciones reversibles, etc. En resumen, la lógica y el número son el resultado de las coordinaciones de las acciones del sujeto, y no se extraen del objeto, aunque estas coordinaciones sólo aparezcan por las acciones ejercidas sobre los objetos; y la construcción de las estructuras lógicas y numéricas sucesivas es el resultado simultáneo de una abstracción a partir del funcionamiento anterior de la acción y de las generalizaciones operatorias que hacen que las composiciones que se aplican a los elementos así abstraídos de la acción (reuniones, seriaciones, etc.) sean cada vez más móviles y reversibles.

Los conocimientos físicos son el resultado, por el contrario, de las acciones diferenciadas y particulares, en oposición a la coordinación general de las acciones: acciones de levantar pesos, empujar, acelerar o frenar, etc.,

y abstraen de este modo sus elementos de los objetos sobre los que estas acciones se aplican (entendido que estos objetos siempre se conocen únicamente a través de su asimilación con acciones particulares), y no de las coordinaciones de estas mismas acciones, como la lógica y la aritmética. Pero como las acciones particulares —diferenciadas en función de la acomodación de los objetos variados— y la coordinación general de las acciones —que se acomoda de modo permanente a los objetos cualesquiera— siempre están unidas y son de hecho indisociables, resulta claro que las operaciones lógico-aritméticas se vinculan muy estrechamente con las operaciones físicas, sin que se confundan entre sí.

¿Qué sucede entonces con las estructuras espaciales o geométricas? ¿Corresponden —como la lógica y el número— a las coordinaciones de las acciones, o —como los conocimientos físicos— a sus contenidos particulares? En este punto dos hechos resultan decisivos: por una parte, el estrecho paralelismo genético entre el desarrollo del espacio y el del número, en particular entre las operaciones constitutivas del primero y las operaciones lógico-aritméticas; por otra parte, la continuidad histórica de una geometría deductiva indefinidamente fecunda en oposición a la constante sumisión de la deducción física al control de la experiencia.

Desde el punto de vista genético, la naturaleza de las acciones y luego la de las operaciones formadoras del espacio muestra ya de modo harto claro que provienen, como las operaciones lógico-aritméticas, de las coordinaciones generales de la acción en oposición a las acciones particulares. La única diferencia entre las relaciones topológicas elementales de envolvimiento o de orden y clases lógicas o los números es que, en estos últimos casos, los elementos se relacionan independientemente de sus vecindades y, en consecuencia, de manera discontinua mientras que, en el primer caso, los elementos se vinculan en un objeto total gracias a sus vecindades, ordenadas en relaciones continuas. Ahora bien, la vecindad y la continuidad son caracteres generales de la acción y también lo son del encaje fundado en las semejanzas o la seriación de las diferencias y ambas caracterizan a la asimilación más elemental: la acción procede, en efecto, tanto de manera progresiva y de modo continuo como reúne en totalidades o relaciona entre sí los elementos de las situaciones discontinuas sobre las que actúa. Sólo lenta y muy progresivamente estos caracteres de vecindad y no vecindad, es decir, los aspectos espaciales y lógico-aritméticos de la acción se diferencian entre sí: de hecho, solamente a partir del nivel de las operaciones concretas reversibles (7-8 años); en cambio, todas las intuiciones imaginadas preoperatorias se refieren a configuraciones en parte espaciales, aun cuando se trate de colecciones prelógicas o prenuméricas (vol. I, cap. I, punto 12). Por otra parte, la fuente psicológica de las "homeomorfías" topológicas debe buscarse en la correspondencia cualitativa que permite discernir semejanzas formales independientemente de la constancia de las dimensiones y las formas; ahora bien, estas correspondencias están en estrecha relación con las asimilaciones formadoras de las clases lógicas.

En cuanto a la coordinación de los puntos de vista —fuente de la geometría proyectiva— y la de los movimientos —fuente de la métrica

euclidiana— también son coordinaciones generales, aunque lo sean en menor grado que las coordinaciones o asimilaciones topológicas iniciales. Así el espacio —como la lógica y el número— es el resultado de las coordinaciones más elementales de la acción y su evolución procede pues por sucesivas reestructuraciones a través de abstracciones a partir de estas mismas coordinaciones: ello explica la capacidad que tienen, una vez constituidas, las operaciones espaciales para generar una deducción indefinida.

Desde el punto de vista histórico, la relativa oposición entre la geometría y la física habla exactamente en el mismo sentido. Mientras que toda deducción física pura conduce a indeterminaciones que necesitan recurrir a la experiencia, y mientras la generalización simple que se aplica a caracteres abstractos del objeto desemboca tarde o temprano en teorías quiméricas e incompatibles con los hechos, la deducción geométrica resulta, en cambio, indefinidamente fecunda y asegurada en su verdad intrínseca. Se responderá que ha precedido a la deducción una fase empírica, en la geometría como en cualquier otro capítulo de la física: pero vimos (vol. I, cap. I, puntos 1-2) que experiencia no necesariamente significa abstracción a partir del objeto y que el sujeto puede experimentar sobre sus propias acciones por medio de objetos cualesquiera, sin terminar en otra cosa que en el descubrimiento de las coordinaciones necesarias de las primeras, en oposición a los caracteres particulares de los segundos. También se dirá que la geometría siempre concuerda con la experiencia, lo cual parece otorgarle un carácter físico superior al de la misma física. Sin embargo, precisamente las coordinaciones más generales de la acción son las que culminan en una acomodación permanente al objeto cualquiera, una vez que son susceptibles de composiciones reversibles, puesto que la acción se refiere siempre a objetos y que esta acomodación estable se distingue tanto de las acomodaciones particulares como de las coordinaciones entre acciones diferentes abarcadas en sus diversidades.

Si el espacio puede compararse con la lógica y el número, existe, sin embargo, una diferencia importante entre las operaciones lógico-aritméticas y las operaciones espaciales desde el punto de vista de sus relaciones respectivas con la experiencia. Pero esta divergencia es precisamente el resultado —e incluso exclusivamente— de la intervención de las relaciones de vecindad en las relaciones espaciales, en oposición a las de semejanzas, diferencias y equivalencias entre unidades distintas que caracterizan a la lógica y el número. Respecto de cierta escala de observación, los objetos físicos son, en tanto físicos, más o menos vecinos entre sí, exactamente como son más o menos semejantes, diferentes o frecuentes, etc. Ahora bien, por más semejantes, diferentes o enumerables que sean, no constituyen clases, series o conjuntos enumerados sino después de que realmente el sujeto los haya clasificado, seriado o contado (la expresión "enumerable" ya señala esta propiedad del objeto de prestarse a una acción virtual de enumeración, sin por ello presentar de por sí un carácter numérico actual). Por el contrario, dos objetos físicos pueden presentar entre sí una relación de vecindad (o distancia, etc.) en tanto son físicos, independientemente de las estructuras espaciales matemáticas que construimos cuando actuamos sobre

ellos. La razón es que los objetos actúan unos sobre los otros de próximo en próximo y, por lo tanto, en función de la vecindad, mientras que las semejanzas y diferencias no se influyen a distancia (contrariamente a lo que admite la causalidad mágica) para constituir clases, etc., independientemente del contacto espacial. Por lo tanto, junto al espacio matemático —resultante de las coordinaciones del sujeto— interviene un espacio físico o espacio de la experiencia aplicada a los objetos diferenciados por sus caracteres propios. En otros términos, entre varias formas resultantes de la actividad del sujeto, unas pueden convenir mejor que otras a ese sistema de objetos específicos, determinados por sus propiedades físicas, es decir, por las acciones particulares que a ellos se aplican (en oposición a las coordinaciones generales de la acción).[72]

Sin embargo, del hecho de que exista un espacio físico distinto del espacio matemático y no exista lógica o números físicos, porque la vecindad interviene en el seno de las relaciones causales y porque las semejanzas, diferencias o equivalencias no actúan a distancia, no se deduce en absoluto que el espacio físico corresponda término a término al espacio matemático. En efecto, por una parte, el espacio físico es más pobre que el espacio construido por el sujeto. Por otra parte y, en particular (esta segunda razón domina, sin duda alguna, la primera), toda propiedad del espacio real es solidaria de las otras cualidades físicas. Así, la medición de una distancia física consiste en el desplazamiento de un metro en la realidad y no en el pensamiento, y este desplazamiento depende entonces de la masa de los objetos, del campo de gravitación, etc.: constituye por ello un movimiento real que presupone el tiempo y la velocidad. El espacio físico no es una propiedad de los objetos que pueda sin más disociarse de su contexto: no es un continente, separado y homogéneo, sino que es único en su contenido heterogéneo. No obstante, por el hecho de que todas las operaciones que caracterizan la actividad del sujeto determinan posibles transformaciones del objeto, las propiedades del espacio físico pueden traducirse en espacio matemático. Sin embargo, la recíproca no es verdadera y este espacio sigue siendo más rico que aquél, ya que toda transformación lógicamente posible no es físicamente realizable.

Sucede así (como lo hemos visto en el punto 7) que la idea de dimensión aparece genéticamente en función de las acciones de envolvimiento, y cada sistema de envolvimiento puede generar la liberación de un elemento interior en una nueva dimensión, según que este elemento atraviese un punto, una línea, un plano, etc., para convertirse en exterior. Ahora bien, la experiencia física es la que nos enseña que, en el mundo real de las acciones que están a nuestra escala, el espacio sólo tiene tres dimensiones: en efecto, no se puede sacar un objeto de una caja cerrada, ni transformar un guante izquierdo en un guante derecho, etc. (lo que nos demuestra hasta qué punto el espacio físico es más pobre que el matemático). Sin

[72] Por ejemplo, si la reunión de dos microobjetos con otros dos llegara a dar 3 ó 5 microobjetos, se corregiría más bien la concepción de objeto que la relación $2 + 2 = 4$; en cambio, si la suma de los tres ángulos de un triángulo no diera dos rectos se adaptaría un espacio no euclidiano a esta comprobación física.

embargo, estas tres dimensiones son una propiedad física de los objetos sobre los que se ejercen nuestras acciones particulares y no una propiedad de la coordinación general de las acciones. Es posible que intervenga además aquí un factor de herencia puesto que ni siquiera podemos intuir (en oposición a percibir o concebir) un espacio de cuatro dimensiones. Pero, si se trata entonces de un fenómeno hereditario "especial", es decir, de una propiedad cromosómica de los linajes humanos (o de los mamíferos superiores, etc.) en oposición a la herencia general (herencia citoplasmática) de los seres vivos: nuevamente se trataría de acciones particulares respecto de las coordinaciones comunes a todos los organismos. Asimismo, si el espacio físico es euclidiano en la escala de nuestras acciones ordinarias, lo es porque, para nuestros instrumentos habituales de medición, los ángulos de un triángulo son iguales a dos rectos. Sin embargo, la medición de los ángulos en otra escala, como las famosas mediciones del ds^2 en física de la relatividad, puede culminar en la determinación de otras formas espacio-físicas. En particular, si en vez de vivir a nuestras bajas velocidades debiéramos actuar cotidianamente sobre un mundo de altas velocidades, las curvaturas del contenido espacio-temporal al que deberían acomodarse nuestras acciones serían sin duda alguna sensibles a nuestros órganos.

Desde el punto de vista de las relaciones entre la actividad del sujeto y lo real y a partir de esta distinción entre el espacio físico y el espacio matemático resulta que, además de las relaciones espaciales descubiertas gracias a las coordinaciones de la acción, muchos conocimientos geométricos pueden ser sugeridos por la experiencia física, es decir, por una abstracción relativa al objeto y a las acciones particulares que sobre él se ejercen, y no solamente en relación con las coordinaciones generales de las acciones del sujeto. Sin embargo, lo sorprendente radica en que la experiencia actúa por sugestión más que por coacción; en otros términos, que la acomodación a los datos externos es más cómoda que en el caso de una ley física cualquiera puesto que podemos reconstruir por nuestra propia cuenta, lo que esta experiencia nos propone. En un célebre pasaje, Poincaré escribió: "El único objeto natural del pensamiento matemático es el número entero. El mundo externo nos ha impuesto lo continuo, que sin duda alguna es el resultado de una invención nuestra, pero forzada por el mundo externo" (*Val. Sc.*, pág. 149). Por otra parte, creemos que lo continuo hunde en parte sus raíces en la coordinación de las acciones, ya que si el grupo de los desplazamientos emana de la actividad del sujeto —como admite Poincaré— no se lo puede concebir en el plano sensoriomotor sin la intervención de la continuidad (por otra parte, la teoría de la Gestalt nos ha enseñado el carácter elemental que presenta el continuo en las "formas" perceptuales y motrices). Sin embargo, si bien la fórmula de Poincaré es demasiado restrictiva para el continuo, es válida en muchos otros casos: existen muchas invenciones geométricas que la experiencia nos ha forzado a realizar, aunque también podríamos haberlas producido a partir de los esquemas relativos a la coordinación de nuestras acciones. Simplemente es necesario decir, en estos casos, que los descubrimientos realizados sobre el espacio físico han precedido a las invenciones del espacio matemático,

mientras que en una cantidad no menor de otros casos, se ha producido la marcha inversa. Por otra parte, lo esencial no radica en este punto: se encuentra en la necesaria convergencia entre las dos clases de estructuras. Ahora bien, esta convergencia resulta clara de por sí, puesto que sólo concebimos los objetos físicos a través de las acciones particulares que sobre ellos se ejercen (el espacio físico siempre es relativo a la escala de estas acciones), y puesto que las coordinaciones generales de la acción, que generan el espacio matemático, estarán siempre de acuerdo con estas acciones particulares y al mismo tiempo las superarán.

Ahora bien, esta dualidad y esta convergencia del espacio físico y el espacio matemático, comparadas con la unicidad del sistema de las operaciones lógico-aritméticas, son extremadamente reveladoras en cuanto a las interacciones entre el sujeto y los objetos. Hemos distinguido las operaciones espaciales de las operaciones lógico-aritméticas: las primeras son constitutivas del objeto, en cambio las segundas se refieren a las reuniones o relaciones entre objetos discontinuos. Resulta entonces evidente que, en tanto se refiere al objeto como totalidad cualquiera de una sola componente, el espacio se refiere al objeto físico al mismo tiempo que traduce la coordinación de las acciones realizadas sobre él, puesto que este objeto físico siempre está dado en función de las acciones particulares que a él se aplican y puesto que estas acciones particulares son indisociales de sus coordinaciones generales. Sucedería lo mismo con las construcciones lógico-aritméticas si las semejanzas, diferencias o equivalencias entre elementos del conjunto de objetos presentasen una significación física independientemente del espacio (por lo tanto, de las vecindades, las distancias, etc.), pero carecen de ella —al menos dentro de la física moderna (comparada con la ontología lógico-física de Aristóteles)— porque los objetos físicos de diversos órdenes (hasta el universo físico en su totalidad, considerado como objeto total) provienen precisamente de las operaciones constitutivas del objeto y no de las operaciones independientes del espacio (salvo, ya lo veremos, en los límites mismos de las acciones particulares, es decir, en el terreno de la microfísica). Resulta entonces que las operaciones espaciales, aunque isomorfas totalmente en su génesis y culminación a las operaciones lógico-aritméticas, aseguran en una forma muy estrecha el contacto entre el sujeto y el objeto, ya que las "operaciones constitutivas del objeto" que generan el espacio provienen de la coordinación de las acciones del sujeto y el objeto físico con el espacio físico mismo que proviene de las acciones particulares del sujeto sobre los objetos.

Esta íntima interacción entre el sujeto y el objeto que asegura así las operaciones lógico-aritméticas, el espacio matemático que les es isomorfo y el espacio físico (solidario del objeto físico en cada uno de sus aspectos), explica entonces del modo más simple el desarrollo, a la vez genético e histórico, del espacio en cuanto a las relaciones entre la deducción y la experiencia. Como hemos visto más atrás (final del punto 6), ya no es posible mantener —con Gonseth— un paralelismo entre los tres aspectos —intuitivo, deductivo y experimental— del espacio porque, desde el punto de vista genético e histórico, el espacio intuitivo que todo lo abarca en

primer lugar, sólo se reabsorbe de a poco, disociándose en dos dominios cuya importancia respectiva se incrementa a sus expensas: el espacio formalizado y el espacio experimental. Ahora bien, la situación se aclara desde el momento en que se plantea el problema en términos de relaciones entre las acciones particulares —fuentes del conocimiento físico (incluido el espacio físico)— y la coordinación general de las acciones —fuentes del conocimiento lógico-matemático (incluido el espacio geométrico)—: partiendo desde el punto de vista de la unión entre estas acciones apenas diferenciadas y las coordinaciones más elementales, el espacio en su génesis psicológica comienza por ser a la vez físico y matemático, es decir, por provenir simultáneamente del objeto y el sujeto (que la intuición confunde masivamente en un bloque indiferenciado): sin embargo, la evolución de los conceptos espaciales —la única decisiva para una epistemología genética— muestra, por el contrario, una gradual disociación entre las operaciones espaciales (por lo tanto, las operaciones constitutivas del objeto en general provenientes de las coordinaciones operatorias del sujeto cada vez más depuradas y formalizadas), y el espacio experimental (por lo tanto, el espacio del objeto físico que proviene de las acciones siempre más diferenciadas por acomodación a la variedad de los objetos y a la multiplicidad de sus cualidades físicas, de la cual es solidario el espacio de la experiencia). Desde el punto de vista histórico, sucede exactamente lo mismo: la geometría de Euclides quiere ser al mismo tiempo una deducción lógica y una física (por otra parte como la lógica de Aristóteles), en cambio, la geometría axiomática de Hilbert y la geometría de los campos de gravitación de Einstein marcan la disociación y la convergencia parcial que asegura la diferenciación acabada entre las coordinaciones generales o lógico-matemáticas de la acción y las acciones particulares sobre las que se apoya el conocimiento físico.

EL CONOCIMIENTO MATEMATICO Y LA REALIDAD

Después de haber examinado la génesis de las relaciones numéricas y espaciales, conviene investigar qué dirección de pensamiento prosigue el desarrollo del conocimiento matemático. La epistemología genética no se permite juzgar de una vez para siempre qué le corresponde al espíritu y qué a la realidad; en consecuencia, sólo puede estudiar la relación entre la matemática y esta realidad mediante el estudio de la dirección que prosigue el conocimiento matemático en el transcurso de su evolución histórica y refiriéndose sólo a los diversos tipos de realidades sucesivamente admitidas por el pensamiento científico en cada una de sus principales etapas. Ahora bien, el mecanismo que se observa cuando se examina la historia de la matemática es, sin duda, el de la toma de conciencia gradual de las operaciones: los geómetras griegos, en efecto, consideraban que contemplaban sin operar, mientras que el análisis y la geometría modernas se presentan como un estudio de las "transformaciones". Ello determina el problema del papel efectivo de las operaciones, que nos conducirá al problema del razonamiento matemático y, finalmente, al que corresponde a las relaciones entre el sujeto y el objeto en la construcción operatoria de los entes matemáticos.

1. La toma de conciencia histórica de las operaciones. A. La matemática griega. Se ha señalado a menudo que, más allá de las filosofías individuales que constituyen, aproximadamente, su reflejo, el sentido común o, se podría decir quizá, la "conciencia colectiva" de los matemáticos, se modificó en forma singular de un siglo a otro, en lo relacionado con la naturaleza o el objeto de su ciencia. A este respecto, nada es más instructivo que meditar sobre la oposición fundamental que separa la concepción matemática de los griegos de la de los modernos, incluso si la metafísica platónica, que el genio griego construyó para justificar el realismo de las formas, reaparece periódicamente en el transcurso de la historia. Ahora bien, esta oposición podría originarse en una conciencia insuficiente del papel de las operaciones, la que caracterizaría la concepción matemática de los griegos y, desde el siglo XVIII, más bien en una toma de

conciencia de los mecanismos operatorios del pensamiento. Si esta tesis es exacta, la historia de la matemática griega constituiría la más interesante de las experiencias epistemológicas: la experiencia de un pensamiento que se ignora como constructivo, y que pese a ello construye y que luego, al carecer de este conocimiento de su propio poder, deja de construir. Se conocen en grado suficiente en efecto, los destinos de la ciencia antigua, que después del "milagro" de su aparición (si hubo milagro) y después de la plenitud de un período de apogeo, dejó, misteriosamente, de ser fecunda para abortar en la decadencia del período alejandrino. Ahora bien, las circunstancias sociales no bastan por sí solas para explicar esta curva histórica, salvo si se logra demostrar la manera en que la ausencia de una conexión suficiente con las técnicas (excepto las arquitectónicas) pudo estimular a los geómetras griegos en sus tendencias contemplativas y antioperativas. El principio de esta esterilidad final, que muchos autores intentaron explicar, ¿se debe a un realismo por negativa, si así puede decirse, a reconocer la actividad del sujeto, mientras que la fecundidad de la ciencia moderna se explicaría entonces, por el dinamismo del mecanismo operatorio, consciente ahora de sus posibilidades internas?

Por diversos que hayan sido los problemas abordados por los matemáticos griegos en los trabajos en los que se pueden observar los gérmenes de casi todos los grandes descubrimientos modernos, el sector de su ciencia que estuvieron de acuerdo en consagrar o codificar, es sin embargo mucho más limitado, en su campo, que la matemática moderna: sólo fueron aceptadas la aritmética y la variedad de la geometría que en la actualidad llamamos euclidiana (por oposición a la geometría proyectiva y a la topología), sin hablar de la estática de Arquímedes, cuyo método, pese a que elucida en muchos aspectos el ideal científico de los griegos, no pertenece a la matemática pura. Los griegos, sin embargo, conocían una especie de álgebra (Diofantes de Alejandría utilizaba signos abreviados para expresar las potencias, etc.) así como una "logística" o arte del cálculo a las que, sin embargo, consideraban como simples técnicas utilitarias y no como ciencias (al igual que la geodesia o medición geométrica concreta). Por otra parte, se aproximaron al cálculo infinitesimal, con el "método de exahustión" de Antifón y de Eudoxio y, sobre todo, con los sutiles procedimientos utilizados por Arquímedes en sus investigaciones relacionados con la evaluación de las áreas y de los volúmenes, pero que él intentó subordinar al método geométrico. De la misma forma, se han comparado a menudo las famosas paradojas de Zenón de Elea con la intervención de las series infinitas en la matemática moderna. De todas maneras, la intención de Zenón era negativa y crítica, pese a que intentó demostrar la imposibilidad racional del movimiento o simplemente su irreductibilidad frente a una pluralidad discontinua, mientras que el infinito de los modernos juega un papel constructivo.

Más aún, la misma geometría de los griegos se limitó voluntariamente, en forma por demás curiosa, a un número de conceptos y de figuras más reducido que aquel que los geómetras conocían efectivamente. Sabemos, por ejemplo, que las curvas llamadas "mecánicas", tales como la cuadratriz

de Hippias, la concoidea de Nicomedes, la cisoide de Diocles, etc., no figuran en las formas consideradas por la geometría de Euclides, como si existiesen formas racionales y otras que serían ajenas a la razón geométrica (de la misma forma en que Aristóteles admite una distinción entre los movimientos "naturales" y los movimientos "contra natura" o "violentos"). Las únicas figuras que esta geometría reconoce, en efecto, son las que se pueden construir mediante la regla y el compás, es decir, mediante rectas o círculos (o rotaciones alrededor de una recta), por oposición a las otras formas, que corresponden, precisamente, a procedimientos "mecánicos" y, por ello, son pasibles de irracionalidad. Por la misma causa, en la geometría griega no existe una teoría del desplazamiento, pese a la utilización efectiva que Euclides hace de esta operación en las descomposiciones y las recomposiciones de figuras. Pese al axioma llamado de Arquímedes (por alusión a sus métodos de exhaustión), no se puede hablar tampoco de un análisis sistemático de lo continuo, y esta timidez respecto del continuo se acompaña con una prudencia general en lo que se refiere al infinito en todas sus formas, analíticas o geométricas.[1]

Cualquiera que sea la oposición fundamental que separa el pensamiento formal de los griegos de las operaciones concretas, en acción en la ciencia utilitaria de los egipcios, en ellos el razonamiento deductivo sigue siendo esencialmente estático. De esta manera, la elección misma de las construcciones mediante la regla y el compás, excluidos los otros procedimientos constructivos posibles para engendrar las figuras, señala, en grado suficiente, que la figura es concebida sólo como relativa a la operación que la determina, y que ésta, entonces, no posee el poder lógico de ser generalizada en sí misma: sólo la figura constituye la realidad matemática objetiva, mientras que la construcción es inherente al sujeto y, en consecuencia, no tiene valor de conocimiento científico. De la misma manera, cuando los pitagóricos descubrieron los números irracionales por generalización de operaciones de raíz cuadrada (en el caso de la diagonal $\sqrt{2}$ de un cuadrado que tiene una unidad de lado) no llegaron a la conclusión de la legitimidad de este concepto en tanto generalización operatoria del número, sino que en un principio la dejaron de lado, como un escándalo intelectual y una especie de herejía: se requirió la reflexión platónica sobre lo conmensurable y lo inconmensurable para que éste pudiese ser aceptado en la geometría. Pero, incluso sin generalizar el número hasta hacerlo corresponder a un continuo espacial (idea reservada a la ciencia operatoria de los modernos después de la aritmética universal de Newton), los griegos, a partir de la reflexión sobre los inconmensurables, hubiesen podido realizar un estudio cuantitativo de las figuras geométricas. Por el contrario, y tal como lo demostraron L. Brunschvicg y P. Boutroux, los griegos intentaron siempre subordinar el razonamiento a la cualidad, hacer "un estudio cuali-

[1] L. Brunschvicg señala con justeza (*Étapes*, pág. 155) que los pasajes curiosos observados por Moritz Cantor en Aristóteles, en relación con lo continuo y lo infinito tienen una significación sólo metafísica y no han dado lugar a ninguna aplicación de orden puramente científico o técnico.

tativo de la cantidad"[2] evitar no sólo el cálculo de las magnitudes concretas, sino también el de las abstractas[3]; de este modo, reemplazaron, por ejemplo, la medición de los ángulos mediante una construcción que conservase la forma cualitativa de la figura.[4]

En resumen y tal como lo demostraron todos los especialistas de la historia de las ciencias, el ideal de la matemática griega es esencialmente contemplativo, es decir, realista en el sentido de la primacía del objeto y de la subestimación o incluso la ignorancia casi intencional de la actividad del sujeto. Según Pitágoras, el número está en las cosas, es decir que, hasta el descubrimiento de los inconmensurables, el número entero era considerado como el principio de la realidad espacial (considerada como la más exterior a nosotros). Después de lo cual, subsiste en sí en el mundo de las Ideas o de las Formas, tal como las figuras cuya belleza y armonía intrínsecas constituyen el objeto del conocimiento racional. El "teorema" es una visión racional, desligada del "problema" y de las construcciones que permiten su demostración. En resumen, el razonamiento estático y cualitativo del matemático griego, en todos sus aspectos, está suspendido de la realidad, independiente de nosotros, propia del objeto.

Ahora bien, como se puede observar, la causa de la debilidad y después de la decadencia final de la matemática griega reside en este ideal de perfección teórica: la esterilidad en la que concluyó, después de tantos siglos de brillo, se originó de esta forma en causas internas y no externas, es decir, en los límites que se había impuesto. ¿Debemos considerar este hecho capital tal como lo hace A. Reymond,[5] como expresión de una lógica más exigente que la nuestra, que renuncia a los conceptos de movimiento y de infinito, y al análisis inagotable del continuo por considerarlos, en función de las *aporías* de Zenón de Elea, pasibles de contradicción? ¿Pero por qué el eleatismo pudo determinar un efecto de inhibición semejante, mientras que, en nuestra época, al igual que en los comienzos del análisis infinitesimal, las "crisis" de la matemática afectan sólo la discusión de los fundamentos, sin esterilizar nunca la técnica? Un hecho como éste nos induciría, por el contrario, a hablar de una lógica más limitada que la de los modernos, por ser más estática y menos apta para asimilar los datos de lo real, por ser menos conscientemente operatoria.

El problema psicológico y genético que plantea la estructura de la matemática griega, entonces, es el de explicar esta lógica con referencia, por un lado, a las operaciones concretas del cálculo "utilitario" que las precedió y, por el otro, a la lógica de los siglos XVI y XVII. Ahora bien, es probable que las operaciones formales hayan sido las mismas para los griegos que para los modernos y muy diferentes, en ambos casos, de las operaciones concretas del nivel precedente (mediciones y cálculo empíricos), así como de las operaciones concretas en juego en la construcción

2 L. Brunschvicg: *Les étapes de la philosophie mathématique*, pág. 97.

3 P. Boutroux: *L'idéal scientifique des mathématiciens*, pág. 70.

4 *Ibid.*, págs. 75-76.

5 A. Reymond: *Histoire des sciences exactes et naturelles dans l'antiquité gréco-romaine*. París, Blanchard.

misma de las figuras. Para decirlo de otra manera, desde el punto de vista de la estructura formal, es evidente que la lógica de los matemáticos griegos es la de las proposiciones e implicaciones puramente deductivas,[6] al igual que la de los geómetras del siglo XVII (e independientemente del hecho de que el contenido de las premisas o de los axiomas sigue siendo intuitivo, por oposición a la axiomatización contemporánea). Pero todo sucede como si, en su descubrimiento del razonamiento formal, los antiguos no hubiesen tomado conciencia en absoluto de su carácter constructivo u operatorio, para decirlo de otra manera, como si no hubiesen en absoluto establecido la misma línea de demarcación entre el objeto y la actividad del sujeto que la establecida por los fundadores de la geometría analítica o del cálculo infinitesimal, al carecer de una reflexión sobre esta actividad como tal. Su pensamiento formal no habría alcanzado en absoluto el desarrollo ilimitado que se hubiese podido esperar, a causa de este defecto de toma de conciencia y, en consecuencia, debido a los límites impuestos por el realismo originado en ello.

Para toda la epistemología tienen gran importancia los problemas de la toma de conciencia del mecanismo de la construcción intelectual y el problema psicológico de la delimitación establecida por el pensamiento espontáneo entre la actividad del sujeto y su objeto. Si el realismo está tanto más arraigado en el sentido común que el idealismo, ello se debe, sin duda, a mecanismos psíquicos elementales cuya dilucidación debemos intentar. A este respecto, la experiencia histórica de los griegos constituye un hecho crucial que se debe analizar, utilizando para ello el mayor número de referencias posibles.

Ahora bien, el estudio del desarrollo mental demuestra, con toda la claridad necesaria, no sólo que la delimitación comúnmente admitida entre el sujeto y el objeto es esencialmente variable de un nivel al otro, sino también que ella depende de un fenómeno constante o constantemente renovado: la dificultad para tomar conciencia de los mecanismos internos de la actividad intelectual, en particular cuando ésta se presenta bajo formas adquiridas recientemente.

No es necesario recordar que, a nivel perceptual y sensoriomotor, la construcción del objeto práctico, tan lenta y trabajosa, supone una fase preliminar en el transcurso de la que no existe ninguna delimitación entre el sujeto y los objetos; por lo tanto, ningún objeto permanente, y, como consecuencia de ello, ningún sujeto consciente de sí mismo en tanto que sujeto: el universo, entonces, es "adualístico", como lo señaló con justeza J. M. Baldwin, es decir que todo lo que se siente y percibe es puesto en un solo y mismo plano, sin distinción entre un mundo exterior y un mundo

[6] Se debe señalar, sin embargo, cuán a menudo, en los diálogos de Platón, se tiene la impresión de que los interlocutores tienen un conocimiento, por así decirlo, fresco y reciente del razonamiento formal: ello se observa, por ejemplo, a partir del hecho de que Sócrates se esmera tanto en explicarles que un hermano es siempre un hermano de alguien, o que la inteligencia no ve ninguna contradicción en el hecho de que el número 6 sea a la vez mayor que 4 y menor que 8.

interior. Este universo indiferenciado inicial comienza a disociarse en una actividad propia y sus objetivos exteriores recién con la construcción de los objetos, por relativa que sea la conciencia de esta actividad propia antes de la aparición del pensamiento.

Con los aspectos iniciales del pensamiento, bajo su forma intuitiva y preoperatoria, la diferenciación de los significantes colectivos (signos verbales) o individuales (imágenes) y de las significaciones elaboradas gracias a ellos, señala naturalmente un progreso considerable en el sentido tanto de la interiorización del sujeto como de la exteriorización del objeto. Este último es separado entonces en mayor medida del yo, ya que sigue siendo un objeto de pensamiento aun en ausencia de toda acción próxima. En cuanto al pensamiento, está mejor interiorizado que la inteligencia sensorio-motriz, ya que se ha convertido en independiente de la acción inmediata y se aleja, como consecuencia de ello, de la superficie de fricción entre esta acción y las cosas. Pero este doble progreso es pagado de inmediato por un retorno del realismo, si definimos el realismo como una confusión del sujeto y del objeto; este retorno, por otra parte, se produce sobre el terreno recién conquistado por el pensamiento, es decir, el de los signos y de las significaciones. De esta manera, los niños y los primitivos se imaginan que los números están en las cosas y presentan una existencia exterior independiente del sujeto que habla (lo que determina los tabúes ligados a algunos números sagrados, etc.); los sueños son imágenes dadas materialmente, a los que se puede observar de la misma forma en que se "ven" los objetos; el propio pensamiento consiste en aliento y en aire,[7] etc. En resumen, el sujeto y el objeto son separados en forma diferente de lo que lo hace el adulto civilizado.

A nivel de las operaciones concretas, la adquisición de sistemas operatorios relacionados con las clases, las relaciones y los números señala, al mismo tiempo, una nueva etapa de la interiorización del pensamiento, puesto que el sujeto descubre su poder de clasificar, de conectar y de contar; también descubre un nuevo progreso en la exteriorización, puesto que las realidades así coordinadas son más estables y objetivas. Pero ello determina una nueva forma de realismo, al no producirse una disociación suficiente entre el sujeto y los objetos: a las clasificaciones o seriaciones se las considera impuestas por el objeto de una vez para siempre, sin un margen suficiente de libertad o de elección, y los números son conectados a las cosas como si al contar el sujeto se limitase a leer cifras ya constituidas, de la misma forma en que comprueba la existencia de propiedades inherentes a lo real.

Finalmente, en el momento de la aparición de las operaciones formales, no hay ninguna razón para que no ocurra lo mismo. En efecto, conectar entre sí los juicios o las proposiciones hipotéticas mediante operaciones que se traduzcan bajo la forma de implicaciones, de alternativas, de incompatibilidades, etc., no equivale a tomar conciencia de la relatividad de estas

[7] Véase nuestro estudio sobre *La représentation du monde chez l'enfant*. París, PUF, nueva ed. 1948, caps. I-III.

conexiones en relación con el sistema adoptado de los conceptos primeros y con los axiomas elegidos, es decir, en relación con las construcciones originadas en la actividad formalizadora del pensamiento. Los diversos grados de axiomatización señalados en el capítulo 2 (punto 9), al igual que la oposición entre la axiomática insuficiente, por demasiado intuitiva, de los griegos y la formalización cada vez más desarrollada de los contemporáneos dependen del grado de esta toma de conciencia, como proceso reflexivo. La proyección del número entero en las cosas, de los pitagóricos, puede ser una herencia del nivel de las operaciones concretas. Sin embargo, si nos referimos a las transformaciones continuas de los diversos modos de realismo en el transcurso de los niveles precedentes, pese a ser formal, el realismo general del pensamiento de los matemáticos griegos ulteriores comporta la más natural de las explicaciones: al ser el realismo la expresión de una indiferenciación entre el sujeto y el objeto y al efectuarse la diferenciación entre ambos sólo en forma progresiva, cuando alcanza un nuevo grado de elaboración intelectual, el sujeto pensante no considera nunca, en un primer momento, que actúa mediante su pensamiento; por el contrario, siempre, antes de aprehender reflexivamente los mecanismos comienza por tomar conciencia de los resultados de este pensamiento. Toda la filosofía del conocimiento de los griegos señala esta primacía del objeto, por oposición al *cogito* que inaugura la reflexión epistemológica moderna: desde el supuesto "materialismo" de los presocráticos a la reminiscencia platónica de las verdades supra sensibles, desde la lógica ontológica de Aristóteles a la intuición platónica, el pensamiento griego ha considerado siempre que aprehendía o contemplaba realidades ya constituidas, sin descubrir que operaba sobre ellas. Sólo los escépticos y los sofistas atribuyeron al sujeto una actividad efectiva en el proceso cognitivo, aunque limitándose a atribuir a las construcciones del pensamiento la relatividad deformante o el error, y no la coherencia necesaria o la objetividad.

Se comprende, entonces, la verdadera causa psicológica del carácter estático del razonamiento matemático griego, incluso en sus propios creadores, cuyo dinamismo intelectual contrasta en forma tan sorprendente con la inmovilidad de la visión de las cosas a la que llegaban. La "lógica" o el álgebra no forman parte, según ellos, de la ciencia propiamente dicha, por ser inherentes a las actividades mentales del sujeto, mientras que el conocimiento aritmético y geométrico se relaciona con objetos ideales desligados del proceso constructivo del pensamiento. La construcción geométrica se reduce a la de los círculos y de las rectas, ya que a estos objetos se los consideraba independientes de esta construcción, de la misma forma en que las grandes obras del arquitecto entran en el reino de la belleza eterna una vez liberadas de la regla y del compás que permitieron la elaboración del plano. Las curvas mecánicas, por el contrario, no son aceptadas porque siguen dependiendo de esta elaboración activa. Las series infinitas de Zenón no adquieren una significación positiva, porque el dinamismo operatorio que revelan no garantiza su objetividad, al no producirse una toma de conciencia suficiente de su generalidad, y el continuo aparece como una propiedad del objeto ajena a este dinamismo.

Lo inconmensurable es considerado inicialmente como ilegítimo por depender de la operación que lo ha engendrado, después de lo cual se convierte en legítimo cuando se lo separa de ella. Por ser inherente a la acción del sujeto, el movimiento no pertenece al mundo de las relaciones matemáticas; las relaciones proyectivas son también ajenas a los entes geométricos, por depender de los puntos de vista que se tiene sobre el objeto y no del objeto como tal. En resumen, en la medida en que se perciben algunos aspectos operatorios de la construcción intelectual, todo lo que se experimenta como operatorio se lo disocia del objeto y se lo desvaloriza; por otra parte, en la medida en que esta toma de conciencia es incompleta, el resultado de las operaciones es disociado del sujeto y proyectado en un objeto al que se considera como subsistente en sí mismo.

Este dualismo inherente a una toma de conciencia insuficiente del carácter operatorio propio del pensamiento formal explica, entonces, tanto el realismo estático de la matemática griega en su apogeo como las causas de su declinación final.

2. La toma de conciencia histórica de las operaciones. B. La matemática moderna. En su bello libro sobre el "Ideal científico de los matemáticos", P. Boutroux distingue, después del "período contemplativo", característico de los matemáticos griegos, dos grandes períodos en la historia de la matemática moderna: el primero se caracterizaría por el triunfo de las síntesis operatorias, mientras que el segundo señalaría una especie de retorno al objeto, bajo la forma de lo que el autor, en forma muy sugestiva, designa como una "objetividad intrínseca". Coincidimos con P. Boutroux en lo que concierne al "período sintetista", caracterizado por la constitución del álgebra como ciencia teórica, por la de la geometría analítica y por la del cálculo infinitesimal: según este autor, en efecto, el ideal de verdad matemática característico de esta época consistiría en una construcción operatoria indefinida y autónoma, lo que nos permitirá hablar de una toma de conciencia histórica de las operaciones, por oposición a las lagunas de la toma de conciencia que caracterizaban la actitud contemplativa de los griegos. Por el contrario, la manera en que el eminente historiador del pensamiento matemático concibe el último de los tres períodos así diferenciados merece, a nuestro parecer, algunas reservas. Este período, diferenciado ya en el transcurso del siglo XIX y que domina aún con vigor nuestra época, se caracteriza por el sentido de la complicación creciente de los caminos posibles y por la necesidad de una elección y de una exploración propiamente dicha. El problema, sin embargo, consiste en saber si esta consistencia o incluso esta resistencia crecientes de la realidad matemática a la síntesis operatoria simple supone la intervención de una especie de dominio transoperatorio, si se nos permite la expresión, o si la complejidad creciente de los entes descubiertos por el matemático traduce sólo la indefinida variedad de las operaciones posibles. Ahora bien, el problema no se plantea sólo en términos teóricos: presenta un aspecto histórico-crítico y, por ello, genético, cuya existencia aparece en forma evidente en la manera en que dicho "período analítico",

como lo llama P. Boutroux, se articula con el "período sintetista". ¿Debemos considerar, como este autor, que el surgimiento de la teoría de los grupos así como el movimiento logístico o "algébrico lógico" son efectos directos del ideal "sintetista" o, por el contrario, que son expresiones reveladoras de la "objetividad intrínseca" característica del tercer período? Debemos examinar este problema; en efecto, según que la filiación de las ideas se determine en una u otra forma, esta objetividad intrínseca puede aparecer como un retorno al idealismo o si no como el último término del vasto desarrollo histórico que conduce de la inconsciencia relativa de las operaciones a su descubrimiento y finalmente a su coordinación en totalidades resistentes, imponiéndose al espíritu con la misma fuerza de objetividad que una realidad completamente organizada y constituida.

El álgebra, heredada de Oriente y que los griegos excluían del campo de la ciencia, fue, por así decirlo, reincorporada en ella a partir del siglo XVI, cuando Descartes le asigna, por fin, la situación teórica que corresponde. Ahora bien, no cabe ninguna duda de que no se puede considerar que la técnica algebraica constituye una disciplina matemática —por oposición a un conjunto de simples procedimientos de cálculo— salvo si atribuimos a las operaciones como tales un valor de conocimiento propiamente dicho. En la matemática de los antiguos, el número es una realidad que existe en sí misma, independientemente de las operaciones que permiten su formación, y a las operaciones de adición, de duplicación y de división por la mitad se las considera como la expresión de las relaciones que eternamente existen entre ellos. Estas relaciones permiten que el matemático las obtenga y corresponden así a un procedimiento subjetivo de construcción, análogo a los procedimientos que intervienen en la de las figuras geométricas. Ni en uno ni en otro caso, sin embargo, se considera que la operación es constructiva, en el pleno sentido del término: es construcción sin creación, en tanto actividad del sujeto, y creación sin construcción, en tanto relación entre los objetos. El álgebra, por el contrario, reemplaza el número mediante una cantidad abstracta, que corresponde a números cualesquiera; el acento se pone en las transformaciones de estas cantidades, es decir, en las cantidades como tales. La utilización de los métodos algebraicos, entonces, supone efectivamente, la toma de conciencia de las operaciones; ya no se las concibe como relaciones entre objetos, aunque independientes del pensamiento, o como actividad del pensamiento, pero que simplemente alcanza y no transforma su objeto: la operación algebraica constituye ambas cosas a la vez, ya que es una relación objetiva, pero entre objetos relativos a su propia construcción. Conocemos el modo en que la filosofía reflexiva de Descartes consagra esta toma de conciencia de la actividad del sujeto.

Pero esto no es todo. El descubrimiento de la geometría analítica extiende este mecanismo operatorio al espacio y revela el paralelismo absoluto de la cantidad algebraica y de la longitud rectilínea. Esta idea había sido entrevista por los griegos, aunque no la explotaron en forma sistemática faltos, precisamente, de una justa evaluación de las operaciones

como tales: Descartes, por el contrario, considera que el álgebra precede a la geometría analítica y que la geometría analítica es una aplicación del álgebra a la geometría. La construcción geométrica, gracias al sistema de las coordenadas cartesianas, se hace operatoria lo que elimina, de este modo, el conjunto de las restricciones que la ciencia griega imponía a la construcción de las figuras y a la delimitación de los conceptos utilizados en matemática. El movimiento, en particular, definido como el hecho de "que los cuerpos pasan de un lugar a otro y ocupan sucesivamente todos los espacios que están entre ellos"[8] se convierte no sólo en un concepto geométrico esencial, sino también en uno de los dos conceptos fundamentales de esta matemática universal, a la que Descartes sueña con reducir la ciencia en su totalidad.

Pese a que Descartes, al igual que los griegos, admite el carácter intuitivo de las verdades matemáticas, esta intuición ya no es una contemplación: se trata, por el contrario, de desarticular las totalidades que proporcionan la intuición reduciéndolas a elementos simples que el álgebra se encarga de recomponer operacionalmente. "A partir de ese momento, dice P. Boutroux, la ciencia, en lugar de ser, tal como lo consideraban los antiguos, una contemplación de objetos ideales, se presentará como una construcción del espíritu" (pág. 109).

En lo que se refiere a la geometría de los indivisibles de Cavalieri, defendida por Pascal, y al cálculo infinitesimal de Leibniz y de Newton, P. Boutroux tiene sin duda razón, en cierto sentido, al interpretar su constitución como un álgebra de lo infinito que prolonga la de lo finito: lo mismo hacen, por otra parte, el propio Newton, Euler y Lagrange. Por ello interesa el texto de Lagrange: "Las funciones representan las diversas *operaciones* que se deben realizar sobre las cantidades conocidas para obtener los valores de aquellas que se buscan, y, en realidad, son sólo el último resultado de este cálculo" (citado por P. Boutroux, pág. 129). Hay que agregar, sin embargo, que, al repetir una infinidad de veces las combinaciones del cálculo algebraico, esta prolongación del álgebra en teoría de las series infinitas y en análisis infinitesimal ha aportado una significación renovada a la toma de conciencia de las operaciones: la del dinamismo intelectual que alcanza el infinito y la continuidad: "la realidad última, en Leibniz, es la razón concebida como el progreso ilimitado de un desarrollo ordenado; con esta concepción, el intelectualismo termina por tomar conciencia de sí mismo" (L. Brunschvicg, *Etapes*, pág. 209).

Ahora bien, si de este modo la inversión de las perspectivas es total entre una matemática realista y estática, que culmina en la contemplación por carencia de toma de conciencia, y una matemática operatoria cuyo dinamismo se continúa incluso en el sueño de una combinatoria universal en la que Leibniz esperaba generalizar los descubrimientos de su genio. ¿Cómo explicar, entonces, que la evolución ulterior de la matemática no haya seguido esta dirección simple marcada por el desarrollo de las opera-

[8] Edición Adam-Tannery, XI, pág. 39.

ciones finitas en infinitas formuladas en el siglo XVII? Este es el interesante problema que plantea P. Boutroux y cuya solución quisiéramos discutir brevemente.

Al ideal que llama "sintetista", según el que la matemática sería así la expresión de una construcción operatoria de naturaleza "algebraico-lógica", P. Boutroux vincula, sucesivamente, el desarrollo de los números complejos, como resultante de la combinación formal de las operaciones algebraicas, el descubrimiento de los grupos de sustitución, el de las geometrías no euclidianas y, por último, el movimiento logístico. Pero no considera que la culminación histórica de estas diversas corrientes constituye un desarrollo, sino, más bien, una declinación: "Para proporcionar a las teorías matemáticas una estructura sólida, hemos decidido proporcionarle la forma de sistemas lógicos; sin embargo, al comprobar que estos sistemas son artificiales y, por otra parte, que pueden ser diversificados hasta el infinito, comprendemos que no constituyen ni toda la matemática ni lo principal de esta ciencia. Detrás de la forma lógica hay otra cosa. El pensamiento matemático no se limita a deducir y a construir" (pág. 170).

Lo que caracterizaría al tercer gran período de la historia de la matemática sería, según P. Boutroux, el descubrimiento de esta otra cosa; este período se caracterizaría por un "ideal" cuyos signos anunciadores pueden percibirse desde los comienzos del siglo XIX y cuyas manifestaciones típicas son actuales. Ahora bien, la calidad "transoperatoria", si así se puede decir, que P. Boutroux parece acordarle a este tercer ideal nos parece precisamente, y por el contrario, la manifestación más decisiva de la realidad de las operaciones.

El desarrollo de la teoría de las funciones, nos dice P. Boutroux, ha alcanzado una complejidad que desafía al análisis algebraico (p. ej., cuando interviene una infinidad de series convergentes) y que sólo permite la construcción "si así puede decirse, en potencia" (pág. 175). Comparada con la de las épocas anteriores, la matemática de nuestro tiempo ha perdido su bella simplicidad para comprometerse en lo imprevisto de los rodeos y de los cambios de fronteras. Abel ya demostró la imposibilidad de expresar las raíces de la ecuación del 5º grado en función algebraica de los coeficientes, en lo que se originó la teoría de las ecuaciones formulada por Galois y el propio Abel, que "se dirigía en una nueva dirección y asumía una importancia mayor que nunca" (pág. 186). De la misma forma, en el campo de las ecuaciones diferenciales los métodos se multiplican y se diversifican en la forma menos previsible: "En un sector de la matemática muy alejado de las ecuaciones diferenciales se buscará un nuevo instrumento de cálculo: la función *automorfa, fuchsiana* o *kleiniana*", cuya existencia fue demostrada por Poincaré en 1881, etc., etc. (págs. 188-189). En esto se originaba la idea que tenía Galois sobre el trabajo de los analistas: "no deducen: combinan, comparan. Cuando llegan a la verdad, lo hacen por algo que los sorprendió por casualidad" (pág. 191). La verdad, entonces, es que el analista moderno tiene más dificultades para escoger que para construir (pág. 192). La realidad matemática resiste a sus esfuerzos

y según P. Boutroux sólo puede ser considerada "como el resultado puro y simple de sus construcciones" (pág. 193).

Surge así la conclusión: para explicar "esta resistencia opuesta por la materia matemática a la voluntad del sabio, nos vemos obligados a suponer la existencia de *hechos matemáticos* independientes de la construcción científica, nos vemos forzados a atribuir una objetividad verdadera a los conceptos matemáticos: objetividad que llamaremos intrínseca para indicar que no se confunde con la objetividad relativa al conocimiento experimental" (pág. 203).

Las conclusiones de este análisis notable convergen, sin duda, con las convicciones de la mayor parte de los matemáticos cuando éstos no se dejan llevar por la tentación de reducir su ciencia a un simple lenguaje o incluso a una "sintaxis"; sin embargo, y a nuestro parecer, plantean un problema epistemológico esencial: la "resistencia que encuentra la voluntad del sabio" en el manejo y la elección de sus operaciones, ¿se presenta más allá de estas operaciones, tal como parece suponerlo P. Boutroux, o en el propio seno del campo operatorio? Hemos hablado de una toma de conciencia de las operaciones para caracterizar la constitución del álgebra, de la geometría analítica y del análisis en sus formas iniciales. Pero esta toma de conciencia se efectúa por etapas, procediendo de la superficie hacia el centro: lo que se percibe, en primer lugar, es el resultado de la actividad del espíritu, independientemente de esta última, de la que está entonces separado (cf. la contemplación helénica); luego se perciben las manifestaciones más simples y directas de esta actividad, en sus aspectos móviles y libres: por ejemplo, las operaciones elementales constitutivas del álgebra y de las series infinitas que la continúan. Si se considera que estas operaciones están sometidas a la "voluntad" propia, ello se debe a que permanecen aún próximas al límite del campo operatorio, en lugar de penetrar en su interior: esto constituye una prueba suficiente de que no se consideró desde un primer momento que constituían conjuntos cerrados y articulados bajo la forma de "grupos". Pero es normal que una tercera etapa suceda a esta segunda: nos referimos a la de la toma de conciencia de los sistemas de conjunto que constituyen las operaciones, es decir, conexiones necesarias entre las transformaciones operatorias por oposición al manejo de algunas operaciones aisladas que, entonces, están al parecer sometidas a la simple "voluntad del sabio". Si examinamos con atención los criterios invocados por P. Boutroux, esta tercera fase de la toma de conciencia histórica de las operaciones es la que caracteriza, a nuestro parecer, el tercer período que él señala.

Para caracterizar los comienzos de su tercer período, en efecto, P. Boutroux invoca la revolución operada por Galois en la solución de las ecuaciones que van más allá del 4º grado: pero esta solución, precisamente, se basa en la teoría de los grupos; lo mismo ocurre con la función automorfa, citada por el autor. Ahora bien, todos los especialistas de este difícil campo coinciden en afirmar que, en la teoría de los grupos, el espíritu ya no construye "según su voluntad", sino que explora, de acuerdo con la

descripción de Galois, y se encuentra en presencia de una "objetividad intrínseca", según la feliz fórmula de P. Boutroux. Para comprobarlo, basta con releer las bellas páginas que G. Juvet consagra a la armonía interior de los grupos, concepto que, considera, actúa como infraestructura del conjunto de los entes matemáticos: "La roca que el espíritu halló para fundar sus concepciones es aún el grupo que entonces, y al parecer, constituye el arquetipo de los entes matemáticos".[9]

Pero, ya que se menciona como primer ejemplo de la aparición de este tercer período el método de resolución de las ecuaciones superiores al 4º grado, cabe preguntarse por qué se sitúa la construcción de la teoría de los grupos en el período "sintetista", es decir, el segundo y no precisamente el tercero. En este punto creemos adivinar en P. Boutroux una cierta actitud realista: al no poder negar la naturaleza operatoria de los grupos de sustitución, sitúa su descubrimiento en su segundo período, y luego separa artificialmente esta adquisición de la de la resolución de la ecuación del 5º grado, es decir, de un "hecho matemático" cuya objetividad intrínseca pertenece al tercer período. Todo parece indicar, por el contrario, que justamente el descubrimiento de la existencia de los grupos de transformaciones es el que inaugura el reino de la "objetividad intrínseca". Lo mismo ocurre en relación con la construcción de las geometrías no euclidianas, cuya objetividad intrínseca también se basa en grupos bien definidos. En lo que se refiere a las axiomáticas, investigaciones técnicas especialmente profundas en la dirección de esta misma objetividad, G. Juvet, en un notable artículo póstumo, suponía también que su no contradicción está condicionada por su subordinación a "grupos": "no existe ninguna teoría deductiva que no sea la representación de un cierto grupo".[10] Ni siquiera se puede replicar que incluso en relación con la logística se creyó en su objetividad intrínseca (cf. algunas escuelas, p. ej. la polaca). Ahora bien, si las formas más simples y más puramente cualitativas (en el sentido de intensivo) de las operaciones logísticas constituyen ya, como hemos intentado demostrarlo (cap. 1, puntos 3 y 6), sistemas de conjunto bien definidos, caracterizados por su composición reversible, se observa así, incluso en el terreno de las operaciones lógicas, lo que constituye a nuestro parecer el mecanismo común de las construcciones del tercer período: la coordinación operatoria bajo la forma de sistema de conjunto cuya coherencia resiste a la "voluntad del sabio". En particular, hemos observado en el propio seno de la lógica de las proposiciones el conocido "grupo" de las "cuatro transformaciones".[11]

Ahora bien, el hecho de que después de haber considerado que podía construir libremente el conjunto de la matemática mediante algunas operaciones manejadas a voluntad, el espíritu haya descubierto la existencia de totalidades operatorias que obedecen a sus propias leyes y que se caracterizan por una cierta objetividad intrínseca, es un hecho de decisiva impor-

[9] G. Juvet: *La structure des nouvelles théories physiques*, 1933, pág. 60.
[10] *Actes du Congrès Intern. de Phil. Scient.* París, 1936, VI, pág. 31.
[11] Véase nuestro *Traité de logique*, § 31, theor. VI.

tancia para la epistemología. P. Boutroux no aclara en qué consiste esta objetividad en relación con la actividad del espíritu. En la lógica del concepto de operación se encuentra implícito el hecho de conducir a esta objetividad; en efecto, las operaciones son necesariamente solidarias unas de la otras, en totalidades de las que el espíritu puede tomar conciencia en forma trabajosa y no directa, mediante tanteos sucesivos y procediendo desde el exterior hacia el interior, es decir, de los resultados a sus fuentes, siguiendo las leyes de toda toma de conciencia. Sin embargo, no sirve prácticamente de nada decir que estas totalidades constituyen la estructura del espíritu, ya que nada prueba que la actividad del sujeto esté acabada o, para decirlo mejor, que consista simplemente en extraer sin fin en una fuente inagotable ya contenida en él. La toma de conciencia, y es con ella que debemos concluir, constituye en sí misma, por el contrario, una construcción: sólo se toma conciencia de un mecanismo interior si se lo reconstruye en una nueva forma, que lo desarrolla explicitándolo, y todo proceso reflexivo, por ello mismo, se acompaña con un proceso constructivo que continúa, reconstituyéndolo, el mecanismo en relación con el que se produce una toma de conciencia. Ahora bien, esta reconstitución no sólo es análoga a la actividad mediante la cual interpretamos una experiencia exterior, sino que, también, sólo es posible cuando existe una relación entre la actividad del sujeto y los objetos.

En ello se origina la dificultad para resolver el problema de la objetividad intrínseca de los esquemas matemáticos. Su centración en la coordinación operatoria constituye una primera etapa que permite, al mismo tiempo, evitar la reducción empirista de este tipo de objetividad al objeto como tal, y su reducción apriorista a estructuras trascendentales ya constituidas. Se debe demostrar aún, sin embargo, la manera en que las totalidades operatorias, cuya riqueza coherente es suficiente para explicar las resistencias que caracterizan esta objetividad intrínseca, se constituyen sin preexistir, en una forma acabada, a su elaboración reflexiva, y se construyen sin que por ello esta construcción sea arbitraria (es decir, dependiente de la voluntad individual del sabio) ni determinada desde el exterior por una vía experimental.

El análisis del concepto de operación, es decir, del modo de necesidad inherente a las totalidades operatorias, se encuentra, entonces, en el centro del problema. Para continuar esta discusión, utilizaremos a continuación este estudio del razonamiento matemático, ya que el rigor y la fecundidad de este modo de razonamiento tienen en cuenta todas las relaciones que se deben investigar entre el sujeto y los objetos.

3. El razonamiento matemático. A. De Poincaré a Goblot. Rigor y fecundidad, en efecto, son los dos aspectos indisociables del razonamiento matemático que todos los autores se esforzaron por conciliar. Pero si se los intenta armonizar en principio sin limitarse a comprobar su mutua dependencia, se presenta el peligro de sacrificar la fecundidad al rigor, acentuando lo que corresponde a las prestaciones del sujeto, o de subordinar el rigor a la fecundidad, invocando una participación excesiva del objeto.

Nos contentaremos con decir que el problema del razonamiento matemático presenta en su seno todos los problemas relacionados con la naturaleza de las operaciones lógicas o matemáticas, en tanto que las operaciones suponen un sujeto que actúa y objetos sobre las que se efectúan. Por otra parte, se puede analizar el razonamiento matemático desde dos puntos de vista principales; sus parecidos o diferencias respecto del razonamiento lógico no matemático (Poincaré, Goblot y los logísticos consideraron sobre todo este primer aspecto), o la regulación que interviene en relación con él entre los aportes respectivos del espíritu y de lo real (E. Meyerson discute sobre todo este problema). Pese a que ya hemos estudiado el primero de los dos problemas,[12] volveremos a examinarlo aquí, ya que su solución condiciona la del segundo.

1. *La solución de H. Poincaré.* Desde 1894, Poincaré contraponía en los siguientes términos la estructura del razonamiento matemático a la de los razonamientos no matemáticos. Estos últimos son de dos tipos: el silogismo, que es riguroso pero estéril, ya que en sus conclusiones descubre sólo lo que estaba incluido en sus premisas, y la inducción experimental, que es fecunda, ya que logra descubrir nuevas conclusiones, pero no rigurosa, por ser incompleta. El razonamiento matemático, por el contrario, es al mismo tiempo riguroso y fecundo: las conclusiones que obtiene son siempre nuevas y más ricas que las premisas y, sin embargo, son seguras y no simplemente probables. Ello se debe a que procede por recurrencia, de acuerdo con el principio de inducción completa creado por Maurolico: si una propiedad es verdadera de $n = O$ (o $n = 1$) y si se determina que su verdad para n determina su verdad para $n + 1$, entonces es cierta en relación con todos los números enteros. Russell y Goblot objetaron a ello que el razonamiento por recurrencia se basa a su vez en conceptos más simples. Según Russell, deriva, en forma directa, de la definición de los números inductivos o enteros: la herencia que asegura la transferencia de las propiedades de un número al otro traduce, de esta manera, la generalización de estos números. Goblot, por otra parte, sostiene que el razonamiento por recurrencia supone una demostración previa (la de la transferencia de la verdad de la propiedad en el caso de n a su verdad para $n + 1$) y que esta demostración es una construcción. Poincaré, sin embargo, considera que esta intervención de la construcción es evidente; la consideraba incluso como necesaria, aunque no como suficiente, porque además, luego, se deben conectar las construcciones sucesivas mediante una construcción, es decir, precisamente, mediante razonamiento por recurrencia. Como lo dicen con justeza Daval y Guilbaud, él "considera a la recurrencia como una especie de razonamiento sobre el razonamiento, o de razonamiento en segundo grado" [13] (lo que queda incluido dentro de la fórmula que dábamos en el cap. 2, punto 9 sobre el pensamiento formal: un

[12] Véase nuestro *Traité de logique*, cap. VIII.

[13] R. Daval y G. T. Guilbaud: *Le raisonnement mathématique*. París, PUF, 1945, pág. 18.

sistema de operaciones que se efectúan sobre operaciones). El razonamiento por recurrencia es entonces una construcción operatoria ligada a la construcción de los números y reflejada luego bajo la forma de operaciones formales que permiten condensar estas construcciones en un único todo, sin verse obligado a rehacerlas sucesivamente para cada nuevo caso. La fecundidad del razonamiento matemático, en último análisis, dependería, entonces, de la intuición del número puro, en tanto irreductible al silogismo, y su rigor provendría del hecho de que las operaciones constructivas, iniciales o formalizadas, no se concatenan mediante una serie finita de silogismos, sino mediante una infinidad de silogismos (lo que, señalan Daval y Guilbaud, dirigiéndose a Goblot, no es lo mismo), es decir, nuevamente, mediante la intuición de un poder de repetición que supera al silogismo reduciéndose a la del número puro.

El valor de la solución de Poincaré depende, entonces, del valor de la hipótesis del número puro. Ahora bien, esta hipótesis plantea dos problemas, que corresponden, precisamente, a las dos preguntas que el problema del razonamiento matemático recubre: el de la irreductibilidad del número a la lógica y el de la naturaleza del acto mediante el que aprehendemos el número puro, es decir, un número cualquiera como producto de la iteración ilimitada cuyo poder posee nuestro espíritu.

Ya hemos tomado posición respecto del primer punto (vol. I, cap. I, § 6): sin ser reductible a ninguno de los elementos lógicos particulares, el número constituye sin embargo la síntesis, es decir que está mucho más próximo a ellos de lo que lo admitía Poincaré. También es cierto que se puede considerar a las clases y las relaciones asimétricas como resultantes de una disociación del número en sus componentes, y al número entero como una síntesis de las clases y de las relaciones asimétricas; en ambos casos, sin embargo, no existe una intuición del número radicalmente distinta de la de las clases o de las relaciones. Para comprender por qué el razonamiento matemático es más fecundo que el silogismo, se deben comparar entonces las clases de los números o de los entes matemáticos con las de las clases y de las relaciones lógicas: ahora bien, la cuantificación extensiva y numérica explica por sí sola esta diferencia de fecundidad en relación con la cuantificación intensiva de los segundos (en relación con estos tres tipos de cuantificaciones, vol. I, cap. I, § 3): el número de combinaciones es mucho mayor cuando en una serie de encajes se puede comparar a las partes tanto entre sí como con las totalidades sucesivas que si se consideran sólo las relaciones de parte a todo. La estructura numérica invocada por la recurrencia no tiene otro sentido. Pero el principio también es válido para el razonamiento geométrico de carácter extensivo y por ello su fecundidad es similar.

En cuanto a la intuición del número puro, como poder de representarse que "una unidad siempre se puede agregar a una colección de unidades",[14] no caben dudas de que el problema que plantea es el del esquema operatorio. Dada la operación inicial + 1, elemento del grupo

[14] H. Poincaré: *La valeur de la science*, pág. 22.

aditivo de los números enteros, decir que tenemos la intuición del número puro equivale a afirmar que la serie de las operaciones agrupadas constituye un esquema anticipatorio y que, para aprehender su sucesión posible, no como un todo estático, sino como un dinamismo hecho de operaciones virtuales, no es necesario precisar el detalle de las operaciones sucesivas. En este sentido, la hipótesis de una intuición del número puro se reduce a la otra suposición fundamental de Poincaré que sostiene que el concepto de grupo está presente a priori en el espíritu y que, de esa manera, constituye una intuición racional (de los desplazamientos en el caso del espacio y de la adición de la unidad en el del número): ello explica el paralelismo entre el razonamiento geométrico y el razonamiento analítico, sin que, para razonar en forma rigurosa y fecunda sobre las figuras sea necesario evocar la infinidad de los números. ¿Pero por qué hablar de intuición o de a priori? Por una parte, hay construcción genética tanto del grupo de los números como del de los desplazamientos y, por la otra, a este acto de la inteligencia, en su núcleo operatorio más esencial, se lo califica entonces como intuitivo, por oposición al desarrollo detallado de las operaciones particulares. En relación con este punto, entonces, nos encontramos en el núcleo del problema de la naturaleza de los objetos matemáticos, y llamar intuición a esta toma de posesión de su objetividad intrínseca tiene más el efecto de ocultar la dificultad que de revelarnos el secreto.

2. *La solución de G. Goblot.* La interpretación del razonamiento matemático elaborada por Poincaré tiene dos tipos de contradictores: los logísticos y E. Goblot. En el punto 5 realizaremos un atento examen del análisis de los primeros, más profundo que el de los segundos. Aquél, en efecto, termina por sacrificar en forma deliberada la fecundidad en aras del rigor, hasta un punto tal que en la actualidad parece pasado de moda y que a algunos, incluso, les parece desprovisto de significación plantear aun el problema de la productividad del razonamiento. Pero incluso si se postula que el problema ya no se plantea en lo que se refiere a la estructura formal de la deducción, resurge tan pronto como se intenta determinar las relaciones entre esta estructura y la realidad. Por otra parte, si se intenta expresar una estructura como ésta en términos de operaciones, incluso puramente proposicionales, ello basta como para que se imponga nuevamente la diferencia entre las inferencias matemáticas específicas y la deducción bivalente en general. Por ello debemos señalar, también, la solución de Goblot, cuyas lagunas son instructivas en lo que se refiere a las exigencias de una solución operatoria completa: si los logísticos de la escuela de Viena, en efecto, eliminaron la fecundidad en aras del rigor, el esfuerzo de Goblot se realizó esencialmente en relación con la explicación de la fecundidad; cabe preguntarse si, por su parte, no dejó entonces excesivamente de lado el rigor.

Deducir equivale a construir, vuelve a descubrir E. Goblot (señalando, incluso, que este descubrimiento tiene lugar una mañana de febrero de 1906, tan decisiva le parece esta iluminación). Pero construir es: 1º efectuar operaciones concretas, como construcciones gráficas, etc., que, según Goblot,

constituyen el aspecto esencial del razonamiento; 2º combinar proposiciones, en tanto que ellas traducen estas operaciones concretas. ¿Cómo explicar, entonces, que la construcción sea rigurosa y no simplemente aproximada, como ocurre en el caso de las ciencias experimentales? Ello se debe al hecho de que esta construcción está regulada gracias a las proposiciones anteriormente aceptadas, mientras que, en la inducción, las proposiciones anteriores dejan un margen más o menos grande de indeterminación, que exige recurrir al control empírico. Las reglas de la construcción no son las de la lógica, sin lo cual se debería considerar que las conclusiones están comprendidas de antemano en las proposiciones anteriores: las reglas se reducen a estas proposiciones, en su contenido, y en tanto que este contenido impone algunas condiciones restrictivas a construcciones por otra parte nuevas.

Dos autores de talento, Daval y Guilbaud, demostraron recientemente [15] que el concepto de construcción forjado por Goblot está aún insuficientemente elaborado, y que, una vez que se lo analiza, no agrega nada nuevo a la solución de Poincaré, que su continuador comprende mal. En la teoría de Poincaré, en efecto, también interviene una construcción operatoria inicial, fuente de razonamiento de partida, luego una especie de razonamiento en segundo grado que generaliza esta construcción al reflejarla. En Poincaré este razonamiento en segundo grado está constituido por el mecanismo de la recurrencia, mientras que la originalidad de la concepción de Goblot es la de que intenta extraer de las operaciones primarias la explicación del rigor que caracteriza a la deducción: el razonamiento deductivo equivaldría, simplemente, a someter estas operaciones a un conjunto de reglas constituidas por las "proposiciones anteriormente admitidas". ¿Es suficiente esta determinación?

No le reprocharemos a Goblot el haber llamado indiferentemente "construcción" a las operaciones concretas, efectuadas material o mentalmente, y a las proposiciones que traducen estas acciones. Como ya lo hemos visto en el cap. 2, ambos constituyen dos niveles sucesivos del pensamiento matemático igualmente esenciales,[16] y existe una lógica de las operaciones concretas al igual que una lógica proposicional. Al afirmar que la fecundidad del razonamiento matemático depende de la construcción de las relaciones iniciales y no de la estructuración de las proposiciones que las expresan, Goblot, incluso, y en cierto sentido, coincide con algunas tesis logísticas recientes; éstas sostienen que la aritmética y el razonamiento por recurrencia son irreductibles al cálculo de las proposiciones y, desde este punto de vista, recurren a un mecanismo extralógico de inferencia. De este modo, tanto la inducción completa de Poincaré como las "construcciones" concretas de Goblot dependerían de la lógica de las clases, de las

15 R. Daval y G. T. Guilbaud: *Le raisonnement mathématique*. París, PUF, 1945, cap. III.

16 "En matemática, y sólo en matemática, se puede decir que la reflexión del pensamiento sobre sí mismo es una operación matemática", dicen a este respecto Daval y Guilbaud (pág. 73), aserción que aceptaremos con la condición de que se le agregue la logística.

relaciones y de los números, y no de la que corresponde a la deducción pura. En otras palabras, sería legítimo afirmar como Goblot que las construcciones están reguladas por el contenido de las "proposiciones anteriormente admitidas" y no por las leyes de la lógica considerada como estructura formal de la lógica proposicional.

Pero no se resuelve un problema esencial y, a nuestro parecer, en la teoría de Goblot subsiste una laguna sorprendente en relación con este punto. Por concretas que sean, las operaciones inherentes a la "construcción" de las relaciones iniciales presuponen también una lógica: no la de las proposiciones como tales, sino, precisamente, la del contenido de las proposiciones, si así puede decirse, ya que este contenido se reduce siempre a un sistema de clases, de relaciones o de números. Tanto cuando son materiales como cuando son mentales, las operaciones concretas, en efecto, no están reguladas desde afuera y por "proposiciones anteriormente admitidas" cualesquiera; por el contrario, lo están desde el interior y por una lógica operatoria que se reduce a agrupamientos de clases y de relaciones o de los grupos espaciales y numéricos. La solución de Goblot carece de esta regulación interna de las operaciones, mientras que en la de Poincaré ella se realiza mediante el mecanismo de la recurrencia, es decir, en realidad, por el grupo de las operaciones iteradas de adición de la unidad que constituyen la serie de los números.

En efecto, si proposiciones anteriores cualesquiera constituyesen la única regulación de las construcciones nuevas, nos encontraríamos ante la siguiente alternativa: o bien las conclusiones que se obtienen están comprendidas ya en las proposiciones anteriores y existe entonces una regulación completa, pero estas conclusiones no son nuevas y la deducción no es constructiva, o, si no, las conclusiones no son nuevas y la deducción no es constructiva; o si no también, las conclusiones son nuevas, es decir, no contenidas en las proposiciones anteriores, pero entonces regulan la construcción sólo en forma incompleta. Para decirlo con mayor precisión: las proposiciones anteriores pueden regular la construcción sólo en la medida en que los resultados no son nuevos; en la medida en que la construcción es nueva, por el contrario, estas proposiciones constituirán como máximo barreras exteriores, que está prohibido franquear, pero en cuyo interior la construcción es contingente y escapa a toda regulación. Al menos el proceso sería así si se tratase de proposiciones cualesquiera, es decir, no elegidas expresamente para lograr el ajuste recíproco de las operaciones.

Ahora bien, las primeras "proposiciones aceptadas", es decir, las definiciones y los axiomas, constituyen, en realidad, y precisamente, un sistema de reglas operatorias que determinan la manera en que las operaciones se combinarán entre sí. De este modo, los axiomas de Peano sobre el número entero (vol. I, cap. I, § 7) introducen los conceptos de sucesor o de "siguiente", de cero y de la igualdad de dos números, de manera tal que se hace posible engendrar la serie caracterizada por la adición $+ 1 + 1 \ldots$: la construcción está entonces regulada ya que las operaciones están compelidas a una composición que no deja lugar a ningún flotamiento. La regulación, entonces, es interna y no externa: lo que la constituye es una

ley de composición y no un sistema de proposiciones anteriores cualesquiera. Si así es, justamente, ello se debe a que las proposiciones iniciales fueron escogidas con este objeto; las operaciones $+1$, -1 y 0 constituyen entre ellas un "grupo" y están reguladas así por su propia transitividad y su propia reversibilidad; por ello, los axiomas que dan origen a la construcción están formulados de manera tal que permiten volver a hallar esa estructura y regularla explícita y no ya sólo implícitamente.

En resumen, si incluso en el plano de las operaciones concretas, la "construcción" que engendra el razonamiento está regulada desde un primer momento, ello ocurre en virtud de las leyes de composición reversible que caracterizan a las operaciones como tales: esta regulación interna es la que dirige la elección de las proposiciones iniciales. Si se descuida la existencia de esta composición reversible de las operaciones, la solución de Goblot es insuficiente para conciliar la fecundidad y el rigor, ya que conduce a confundir las operaciones con acciones materiales (o mentalizadas) cualesquiera.

Si volvemos ahora a la lógica, observamos que su modo de proceder es el mismo, incluso sin considerar la formalización característica de la logística proposicional. Deducir mediante silogismos es también "construir", al igual que cuando se razona matemáticamente, y las reglas de esta construcción son, nuevamente, leyes de composición operatoria y no proposiciones anteriores cualesquiera. Todo silogismo, en efecto, supone un sistema previo de clases o de relaciones encadenadas y este sistema supone una construcción cuyas leyes son las de los "agrupamientos". A partir de ello, la pregunta que, después de Poincaré, plantea Goblot en relación con las razones que determinan que el razonamiento matemático sea más fecundo que el lógico, se presenta de la manera siguiente, pero desplazada en el terreno de la regulación interna: ¿Por qué las composiciones reguladas características de la matemática son más numerosas que las de la lógica? ¿Por qué un "agrupamiento" lógico conduce sólo a algunas composiciones limitadas, mientras que los "grupos" algebraicos o geométricos pueden conducir a un número inagotable de composiciones? La respuesta sólo se puede basar, como se observa, en la propia estructura de las totalidades operatorias que aseguran simultáneamente la posibilidad y el rigor de las composiciones y no en el concepto, demasiado vago, de simple "construcción".

4. El razonamiento matemático. B. La interpretación de Emile Meyerson. La interpretación de conjunto que formuló E. Meyerson en relación con el razonamiento matemático merece un examen especial, tanto a causa de la nitidez incisiva de su análisis como debido a la insistencia con la que contrapone sin claudicaciones el espíritu —definido por la identificación— y lo real, reducido a lo "diverso". Esta antítesis un poco "rígida", tal como lo admite el propio autor, presenta la gran ventaja de constituir una solución simple y clara, en relación con la que los hechos psicogenéticos pueden responder con un sí o con un no: ello es tanto más fácil cuanto que el propio E. Meyerson siempre sitúa la discusión en el

terreno del pensamiento común y real del "curso del pensamiento", lo que requiere, inmediatamente, la verificación genética.

¿Por qué el razonamiento matemático es al mismo tiempo riguroso y fecundo? se pregunta, a su vez, E. Meyerson. Se puede considerar a la matemática como apriorística, lo que explicaría su rigor, pero el pensamiento racional bajo su forma pura y lógica no crea nada, ya que se reduce a la identidad: por sí solo es "aquiescente". También se puede considerar que la matemática se origina en la experiencia, lo que explicaría, entonces, su fecundidad, pero contradiría su rigor. De esta manera "parece imponerse la conclusión de que en este caso no se puede invocar ni el a priori ni el a posteriori, sino que, más bien, debe tratarse de algo intermedio entre ambos o, quizá, de una mezcla bastante difícil de separar entre uno y otro" (*C. P.*,[17] pág. 328).

En efecto, "el número es un concepto abstraído de lo real" (*C. P.*, pág. 322) y la igualdad matemática que opera en las ecuaciones no es una pura identidad, sino una identificación, es decir, una identidad sólo parcial (págs. 333-335). La operación numérica $7 + 5 = 12$ es una síntesis, como lo entendía Kant, ya que "se ha creado algo nuevo" (pág. 335): se debe decir "siete y cinco hacen doce" y la expresión "hacen" designa en realidad "un verdadero acto realizado" (pág. 336). De la misma manera, "el signo algebraico es el símbolo de una operación, de un acto" (pág. 338). Goblot tiene entonces razón contra Poincaré en considerar que la operación es el aspecto esencial del razonamiento (págs. 339-341) y si Bradley pudo hablar de operaciones del espíritu, "la concepción de M. Goblot, en su vigoroso realismo, parece mucho más satisfactoria" (pág. 341): la misma recurre, en efecto, a acciones reales, pero imaginadas, como los "Gedanken experimente" de Wundt y de Kroman (págs. 343-344) gracias a la memoria de las experiencias reales anteriores (págs. 346-347).

Pese a que éste es el papel de lo real en la construcción del número (y a fortiori es, al menos, similar en la construcción del espacio: pág. 308), la experiencia no es lo único que importa, muy por el contrario. En la operación, por activa que Meyerson la considere, "el espíritu sólo opera mediante conceptos abstractos, conceptos que él crea; pero a esta operación sólo la puede observar en lo real, tomarla de lo real. De todas formas, la operación lógica es la traducción en el pensamiento de una operación, de un acto real, que tiene como puntos de partida, como substratos, no a objetos reales, sino a conceptos, ideas" (*C. P.*, pág. 349). Esta es la clave del enigma, por paradójica que sea esta oscilación entre lo real y el espíritu: 1º el espíritu crea así conceptos abstractos "aunque, por supuesto, mediante materiales tomados desde afuera, proporcionados por la sensación" (pág. 370): 2º "el intelecto posee esta curiosa aptitud (que condiciona, al mismo tiempo, una propensión casi irresistible) a proyectar fuera de sí a los entes creados por sí mismo... y cambiar así en cosa reales las cosas

[17] Con C. P. (Curso de pensamiento) designaremos el *Cheminement de la pensée*, Alcan, 1931.

del pensamiento" (pág. 370), lo que determina la proyección del número en lo real, ya que el concepto del número, también, es *abstraído* de lo real (pág. 370); 3º en consecuencia, al operar numéricamente sobre objetos, piedras por ejemplo, "si observamos con atención, se comprueba entonces que hemos operado sobre este número solo..., ya que los objetos reales, las piedras, evidentemente, sólo representan el concepto abstracto que es el número" (pág. 350). En resumen, "hemos creado un género (pág. 351), el número y lo hemos proyectado como objeto: hemos "hipostasiado este concepto, reubicado lo abstracto en lo real, fingido, si se quiere, que era real, para poder actuar sobre él en forma real, observar cómo se comportaba en lo real" (pág. 353). Por otra parte, hacemos lo mismo en la percepción de un objeto cualquiera, de un sillón por ej. (pág. 357), que es la proyección de un concepto en la sensación; en efecto, "en todos los instantes de nuestra vida sólo estamos ocupados en buscar las causas exteriores de nuestras sensaciones, es decir, en constituir estas *sensaciones en conceptos, en un primer momento y luego en objetos*" (pág. 362. La bastardilla es nuestra). "Esta metamorfosis instantánea de un concepto en un real situado fuera del yo es sin duda maravillosa, paradójica" (pág. 361).

Todos los números, el entero positivo, el fraccionario, y también el negativo, el irracional e incluso los imaginarios (págs. 370-377) proceden igualmente de operaciones extendidas indefinidamente a conceptos abstractos, reintroducidos en lo real. Lo mismo sucede en el caso de los hiperespacios (pág. 380), pero los entes así creados mediante la colaboración del espíritu y de lo real "se asemejan cada vez menos a los que conoce el sentido común" (pág. 386).

Se comprende entonces, al fin de cuentas, la doble naturaleza del razonamiento matemático: es fecundo porque reposa en géneros que siempre son abstraídos de lo real y sobre los que son posibles operaciones activas, pero es riguroso ya que, desde la abstracción inicial hasta las operaciones más complejas, la identidad está en acción. La matemática, de esta manera, es sólo una vasta identificación que procede a través de abstracciones, luego de operaciones sobre los conceptos abstractos reubicados en lo real. Más precisamente el rigor se debe a que "podemos llevar a cabo un acto sin perturbar la identidad entre el antecedente y el consecuente" (pág. 396). Ello es lo que se observa en las operaciones espaciales, al igual que en la reunión inicial que sirve para la constitución del número concreto, ya que, en ambos casos, "el acto es un *desplazamiento* que no altera entonces la identidad de los objetos desplazados" (pág. 396).

Para examinar ahora el valor de estas diferentes hipótesis, nos permi-
tiremos comenzar por el final para acceder luego a la génesis. En efecto,
en la tesis de Meyerson todo está bien articulado: de este modo, las serias
reservas impuestas por los hechos psicogenéticos en lo que se refiere a la
formación presumida de los esquemas del objeto, del espacio y del número
corresponden a dificultades que también se presentan, incluso, en la síntesis
de lo idéntico racional y de lo diverso real atribuido al propio razona-

miento matemático. Para elucidar todo el resto, partiremos, entonces, de esta concepción final.

Esta antítesis entre la identidad lógica y la realidad experimental revela, en efecto, con notable claridad las causas de la alternativa a la que, según acabamos de comprobar (§ 3) conduce la teoría de Goblot: si no se asegura la regulación interna de las operaciones constitutivas del razonamiento, las conclusiones son rigurosas sólo en la medida en que las conclusiones nuevas de una construcción matemática están contenidas de antemano en las proposiciones iniciales, mientras que en la medida en que son nuevas las conclusiones escapan a todo rigor. Ahora bien, Meyerson admite una regulación interna de las operaciones, pero la reduce a la identificación sola. Ello determina un desplazamiento del problema en el interior de la construcción operatoria y un refuerzo de la dificultad en la que ya se encerraba la tesis de Goblot. Por un lado, las operaciones son rigurosas, y ello en la exacta medida en que se limitan a "desplazar" algo idéntico en el transcurso de las transformaciones sucesivas que van desde la abstracción inicial hasta las más altas cumbres de la deducción; pero si el rigor, es decir, la regulación de las operaciones, depende de la sola identidad, aquello que en el mecanismo operatorio es riguroso es también necesariamente infecundo. Por otra parte, las operaciones crean algo nuevo; en efecto, 12 no está contenido en 7 y 5 ni el cuadrado de la hipotenusa es enteramente "la misma cosa" que el cuadrado de los lados ni tampoco un espacio de 34 dimensiones es idéntico a un espacio tridimensional. Pero si, gracias a la "identidad parcial" la construcción es en parte rigurosa, sólo lo es en parte, y en la única medida en que no va más allá de la identidad pura: en la medida en que, por el contrario, hay un aporte de lo real, es decir, de lo "diverso" o de lo "irracional", deja de haber rigor.

Sin duda, el mecanismo que se invoca es mucho más sutil, ya que consiste en una perpetua oscilación entre lo real y el espíritu: éste toma de aquél los medios para construir entes ideales que luego remite para reencontrarlos en sí, etc. Antes de examinar en detalle este juego delicado, conviene plantear desde ya los dos problemas esenciales: los elementos que integran la construcción son "desplazados" en un sentido o en otro, y se debe determinar su origen y si se enriquecen durante el proceso. Ahora bien, si el rigor está garantizado por la identidad, ellos pueden provenir sólo de una fuente ajena a este rigor —lo real— y enriquecerse en camino sólo a costa de este mismo rigor. Si la razón se deduce de la identificación, entonces no hay salida: o bien el razonamiento matemático es una serie de identidades puras, y entonces es enteramente riguroso aunque estéril, o, si no, es fecundo, es decir que es más que una simple identificación y engloba lo diverso sin reducirse a la identidad pura, pero entonces no es enteramente riguroso y deja de serlo en la precisa medida en que desborda identidad por sí sola.

E. Meyerson apreció en su justa medida esta dificultad, ya que intentó reducir las operaciones numéricas a los desplazamientos que se producen en la reunión o en la disociación de las unidades, y que el desplazamiento es el principio de toda explicación racional, ya que el mismo no altera la

naturaleza de los elementos desplazados (*C. P.*, pág. 396). Para decirlo de otra manera, la construcción matemática tomaría sus elementos de lo real; sin embargo, seguiría siendo rigurosa, puesto que estos elementos, simplemente, serían "desplazados". Sólo que, independientemente del problema de saber si toda operación es reductible a un desplazamiento, de todas maneras los componentes se enriquecen en el transcurso del desarrollo mismo y el problema del rigor se plantea nuevamente en el transcurso de la oscilación entre el espíritu y lo real: si 7 objetos colocados en la cercanía de 5 engendran la novedad que el número 12 constituye, entonces, la construcción de este número 12 es rigurosa sólo en la medida en que sus 12 elementos son los mismos que los 12 elementos disociados en colecciones de 7 y 5; en la medida en que, por el contrario, el número 12 es algo diferente de los números 7 y 5, es decir, en la medida en que el desplazamiento ha agregado algo nuevo a la simple conservación de los elementos, este comienzo de fecundidad escapa ya al rigor, porque va más allá de la identidad pura (y, efectivamente, se debe aún aclarar por qué 12 es divisible por 2, 3, 4 y 6, mientras que el "desplazamiento" de 7 y 6 unidades daría el número 13, que es primo).

Para mencionar un ejemplo menos elemental y, como consecuencia de ello, más elocuente, sabemos que las geometrías no euclidianas pueden construirse con materiales euclidianos: una vez construidas, sin embargo, ellas incluyen a la geometría euclidiana como simple caso particular. Habría que decir, entonces, si el rigor se debe sólo a la identificación, que los elementos euclidianos que permanecieron idénticos en el transcurso de las transformaciones son los únicos que garantizan el rigor, mientras que las nuevas combinaciones de estos elementos son contingentes. Ahora bien, la paradoja sería tanto mayor cuanto que la situación, en realidad, es recíproca: cada una de las geometrías en juego puede construirse con los materiales de una de las otras, al mismo tiempo que la incluye como caso específico (vol. I, cap. II, § 10). Al no ser nunca el resultado de una construcción idéntica a sus materiales, es evidente que la identificación por sí sola no puede garantizar el rigor, ya que, sin cesar, se ve desbordada por la novedad.

Para ser más preciso, si lo racional se reduce a lo idéntico y lo diverso emana de un real, irracional por diverso, el rigor del razonamiento matemático sólo puede ser aproximado. Por otra parte, Meyerson hubiese admitido esta consecuencia evidente de su hipótesis central: "El razonamiento no puede ser enteramente racional", dice de manera general (*C. P.*, pág. 180, § 169). Pero, de ser así, un razonamiento es tanto menos riguroso cuanto más fecundo; esta relación inversamente proporcional entre la fecundidad y el rigor constituye la principal dificultad de la tesis de Meyerson. Una segunda dificultad se agrega entonces, necesariamente, a la precedente: si la fecundidad de la matemática se basa en los elementos que toma de lo real, esta fecundidad debería ser tanto mayor cuanto más próximos sean los conceptos considerados a la experiencia inicial, y disminuir en razón directa de su alejamiento en relación con ella. Ahora bien, ¿es así? El ejemplo de las generalizaciones de la geometría es precisamente

instructivo a este respecto. Admitamos que la geometría euclidiana de tres dimensiones sea tomada de lo real percibido mediante abstracciones y generalizaciones identificatorias. Los "géneros" así constituidos serían entonces, de acuerdo con la descripción de Meyerson, proyectados nuevamente en la realidad de la que son abstraídos, y sometidos luego a una trituración operatoria para ver "cómo actúan en lo real"; estas combinaciones permitirían por fin ir más allá de la realidad misma y construir esquemas cada vez más abstractos. Entonces, sin embargo, cuanto más nos alejamos de lo real más debe empobrecerse el esquema formal, ya que la razón no crea nada y se limita a transferir algunos de los datos iniciales en el transcurso de las operaciones, "sin perturbar la identidad entre el antecedente y el consecuente": cuanto más "abstracto" es el esquema, menos datos reales iniciales contiene. Ahora bien, se comprueba por el contrario que el esquema final es mucho más rico que el esquema inicial, ya que éste se reduce al nivel de simple caso particular: lo que se comprueba, entonces, es que el acto operatorio crea algo nuevo en función de las distancias y no de su proximidad en relación con lo real; para decirlo de otra manera, una vez más, que es por cierto irreductible a una simple abstracción identificatoria.

Volvemos a enfrentarnos aquí con el problema que, por otra parte, ya conocemos[18]: ¿Es posible reducir la abstracción, mediante la que creemos extraer de la realidad los números enteros o las formas geométricas, etc., a una simple abstracción a partir del objeto? A nuestro parecer, el error corriente de las epistemologías realistas, inspiradas en la filosofía aristotélica de los "géneros", consiste en formular esta afirmación. Ahora bien, independientemente de los hechos genéticos que volveremos a examinar, el problema puede ser solucionado directamente en el terreno matemático cuando se lo plantea en la siguiente forma: ¿Un concepto abstracto es más pobre o más rico que la realidad correspondiente? A nuestro parecer la respuesta no presenta problemas: el concepto abstracto es más pobre, en el sentido de que se construye en relación con un punto de vista especial descuidando los otros, (p. ej., situándose en el punto de vista de la forma y dejando de lado el peso, el color, etc.) ; desde este punto de vista especial, por el contrario, es *inmediatamente* más rico que la realidad concreta, ya que la así llamada abstracción consiste en *agregar* y no en sacarle algo al objeto, claro que eligiendo el punto de vista al que agrega. De este modo, al contar algunas bolitas se les agrega una conexión que no existía entre ellas, en lugar de extraer el número de su colección, y al abstraer una recta de la arista de un cristal se ponen en contacto las moléculas discontinuas e irregularmente dispuestas a lo largo de esta arista por una línea ideal que ellas no comportaban. La abstracción, de esta manera, es una articulación, o, si se prefiere, una estructuración acorde con lo real, y consiste en *relaciones nuevas* que no estaban aún contenidas en el dato concreto. A ello se debe que los entes matemáticos "abstractos" sean infinitamente más ricos que los entes matematicables concretos: éstos

[18] Véase anteriormente en este volumen, cap. I, §§ 2 y 12.

son finitos y aquéllos superan a este finito con todo el poder de las diversas especies de infinitos.

Por otra parte, E. Meyerson apreció perfectamente el problema y el juego sutil de los conceptos "hipostasiados" en lo real, después de haber sido extraídos de aquél; sólo puede tener la significación de explicar este enriquecimiento de la realidad al que llega finalmente la así llamada "abstracción" a partir del objeto. Sólo que, como, según este autor, la estructuración y las relaciones nuevas que el espíritu aporta a lo real se reducen, en definitiva, a la identidad pura y simple, mezclada con los datos extraídos del objeto, es evidente que, desde el punto de vista de la fecundidad, este aporte es nulo y que es válido sólo desde el punto de vista del rigor.

Lo que acabamos de ver, por el contrario, lleva a admitir que en matemática (y en lógica, pero en un grado notablemente inferior) las operaciones son simultáneamente fuentes de novedades y de rigor, sin que éste último se reduzca a la identidad simple. Para decirlo de otra manera, el aporte del espíritu a lo real desborda los marcos de la identificación. Las estructuras esenciales del pensamiento lógico aritmético están constituidas por las clases, las relaciones asimétricas y los números. Una clase se caracteriza por la semejanza entre los individuos que la integran y, en consecuencia, por sus cualidades comunes: en este aspecto actúa la identificación, fuente de la equivalencia cualitativa, etc. Lo mismo ocurre en el caso de las relaciones simétricas, que expresan la copertenencia a una misma clase. Pero las relaciones asimétricas, por el contrario, expresan la diferencia ordenada entre los objetos y se las puede seriar sólo gracias a estas diferencias (de tamaño, de posición, etc.). ¿Se puede decir, acaso, que la diferencia es aún un "género", es decir, que el espíritu identifica lo común entre las diversas diferencias y extrae de ello el concepto de diferencia? Sin duda que sí y de este modo la diferencia se convierte en un concepto como otros y permite definir una clase como otra: la clase de las diferencias consideradas como elementos equivalentes entre sí (como copertenecientes a una misma clase). Pero eso no es todo: en las relaciones asimétricas y en las operaciones de seriación cualitativa, la diferencia juega el mismo papel formal que la semejanza en las clases, o las relaciones simétricas, y en sus encajes. Los "agrupamientos" aditivos y multiplicativos de relaciones asimétricas son, incluso, exactamente isomorfos a los "agrupamientos" correspondientes de clases, la única pequeña diferencia es la de que en ellos la adición no es conmutativa debido, precisamente, a que reúne diferencias ordenadas y no semejanzas. ¿Se puede decir, entonces, que la semejanza expresa la actividad identificatoria del espíritu, mientras que las diferencias provienen de lo real, como resultaría de la antítesis de Meyerson? Sin embargo, para la actividad del espíritu es tan importante diferenciar como identificar, y estas dos actividades sólo adquieren significación apoyadas una en la otra. Es evidente que ambas suponen un real a la vez unificable y diversificable, pero una y otra son inherentes al sujeto, se ejercen paralelamente y determinan dos tipos de estructuras formales que se corresponden término a término.

En lo que se refiere al número entero, como ya lo hemos visto (cap. 1, punto 6), él es una síntesis de la clase y de la relación asimétrica, y entonces de la semejanza y de la diferencia; las unidades que lo componen son, al mismo tiempo, equivalentes y distintas. Diremos, entonces, ¡que el número es un producto del espíritu, en la medida en que hay equivalencia, y real en la medida en que las unidades son distintas! Para decirlo de otro modo: ¿es la unidad 1 la expresión del espíritu, mientras que el número dos $(1 + 1)$ emanaría de lo real, ya que, al adicionarse en él la unidad a sí misma, existe entonces una diferencia entre estas dos unidades?

Desde un punto de vista genético, toda relación establecida entre los objetos resulta así de una actividad del espíritu que consiste en diferenciar tanto como en identificar; en consecuencia, todo sistema de operaciones, como "agrupamiento" de relaciones, es constructivo al mismo tiempo que garantiza su propio rigor gracias al modo de composición que constituye. A este respecto la reversibilidad constituye el equivalente genético de la función que E. Meyerson intenta atribuir a la identidad. Ahora bien, la reversibilidad, que ese autor intenta a menudo reducir a la identidad, es mucho más que una identificación: consiste en el desarrollo de un acto en ambos sentidos. De este modo, al mismo tiempo que es constructivo, este acto tiene una coherencia interna segura basada en la seguridad de volver a encontrar su punto de partida: la identidad es entonces el producto de una operación directa por su inversa y no se confunde con la reversibilidad como tal.

El espíritu, entonces es actividad, o poder de operar, y si toda acción o toda operación supone, en su punto de partida, un lazo indisociable entre el sujeto y el objeto, es artificial atribuir la identidad sólo al sujeto y la diferencia sólo a la realidad. Es indudable que cuando se reúnen dos elementos concretos, esta adición sólo sería posible si estos elementos no estuviesen presentes en lo real. ¿Pero están presentes en estado de distinción, o de acuerdo con el mismo grado de distinción que introducimos en ellos? Y, de ser así, ¿la realidad es suficiente para explicar la operación, o ésta supone un acto que vincula? Ahora bien, tanto si este acto es una sustracción que disocia como una seriación que marca las diferencias, la intervención del sujeto en él es tan necesaria como en la identificación.

Pero si se renuncia al criterio neto y claro de la identidad pura, cabe preguntarse dónde se sitúa el límite exacto entre el sujeto y el objeto. Aquí se revela una vez más la necesidad del punto de vista genético, que impone una rectificación continua de las fronteras, mientras que las filosofías de conjunto sostienen un estado fijo. En efecto, no existe un límite estático e inamovible entre el sujeto y el objeto; el espíritu, en efecto, se construye progresivamente y en los diferentes niveles de esta construcción la delimitación debe entonces rehacerse (por otra parte, en lo que concierne al pensamiento físico, veremos que sucede exactamente lo mismo con lo "real" como tal, y que el propio Meyerson formuló los mejores argumentos en favor de un realismo en cierto modo sustitutivo). A nivel de los reflejos

de las primeras manifestaciones sensoriomotrices, se puede designar como "sujeto" a los movimientos innatos o adquiridos; efectivamente, por su intermedio se manifiesta la actividad del sujeto considerada desde el ángulo de la conducta. Sin embargo, desde el punto de vista del propio sujeto, que corresponde a esta conducta, no hay aun ninguna diferencia entre lo subjetivo y lo objetivo, ya que no hay aun ni sujetos exteriores ni sujeto diferente de la realidad que él vive en cada instante considerado. A nivel de la inteligencia sensoriomotriz, los primeros objetos son construidos al mismo tiempo que el sujeto comienza a distinguir entre ellos. Esta elaboración de lo real prosigue en los diversos niveles intuitivos y operatorios, aunque mediante instrumentos subjetivos, moldeados simultáneamente con él; de este modo, en cada etapa sucesiva la delimitación entre sujeto y objeto debe ser reexaminada: la actividad del sujeto se acrecienta con la extensión de las operaciones, mientras que lo real se objetiva al organizarse. En consecuencia, es imposible asignar de una vez para siempre al sujeto o al objeto una estructura definible en términos estáticos, en la que de una vez para siempre lo idéntico pertenecería a uno de ellos y lo diverso al otro. Si se los desea contraponer en una fórmula válida para todos los niveles, ésta sólo podría ser funcional y no estructural. La identificación de Meyerson, entonces, deberá ser reemplazada mediante una asimilación del sujeto al objeto, en primer lugar sensoriomotriz, luego representativa y operatoria, pero que engloba tanto las operaciones de diferenciación como las de identificación; lo real, por el contrario, sólo puede ser definido en función de acomodaciones variadas, que modifican los esquemas de asimilación que no se reducen en forma definitiva a lo "diverso" irracional.

La verdadera causa de las dificultades de la tesis de Meyerson, como se puede observar, se origina en la posición antigenética que adoptó y que se revela en especial en su interpretación de los conceptos (o "géneros") elementales y antes que nada del esquema del objeto permanente. Se ha observado la sorprendente complejidad (y en el estilo mismo, habitualmente tan límpido, del autor) del núcleo de la demostración resumida en el comienzo de este punto (véase la cita de la pág. 349 de *C. P.*): el espíritu crea conceptos abstractos extrayéndolos de lo real; luego los vuelve a transformar en cosas mediante una proyección *sui generis*; sólo después opera sobre estos abstractos convertidos nuevamente en concretos, lo que permite observar que las operaciones no se efectúan sobre lo real, sino sobre los "géneros" hipostasiados en lo real. El ejemplo más simple de este proceso estaría representado por el concepto de objeto: originado en una identificación de las sensaciones ("género") que conducen a la idea de permanencia sustancial, este concepto reubicado en lo real mediante una hipóstasis inmediata y "paradójica" constituiría el cimiento causal más importante de la misma. Ahora bien, tanto esta tesis general como su aplicación al concepto de objeto (y, como consecuencia de ello, de espacio, de número, etc.) plantean las mayores dificultades genéticas desde el momento en que se reduce la actividad del sujeto a la identificación.

La causa de estas dificultades es evidente. Se origina en el hecho de

que Meyerson, junto con todos los autores de los que nos vimos llevados a separarnos, considera que el espíritu está compuesto por sensaciones o percepciones por un lado y por una inteligencia acabada por el otro; entre ambos, y como máximo, una memoria y recuerdos-imágenes: de esta manera, simplemente, se olvida la acción y la motricidad, cuyo papel epistemológico en la formación del espacio, sin embargo, advirtió H. Poincaré. A menos que nos equivoquemos, en la obra de E. Meyerson la motricidad está prácticamente ausente (con la excepción de algunas observaciones en relación con E. Bergson), mientras que examina los aspectos más diversos del pensamiento (incluyendo una discusión sobre la metafísica). Ahora bien, lejos de suponer la adopción de un pragmatismo utilitario, del "empirismo radical" de James o del bergsonismo, la intervención de la acción conduce a un desplazamiento de los problemas, que se observa también en un plano inferior y por ello más fácil de analizar. La acción es una forma de la inteligencia entre otras, y una forma que prepara el pensamiento; en efecto, entre la percepción y la inteligencia reflexiva se sitúan la inteligencia sensoriomotriz, la inteligencia intuitiva o interiorización representativa de la acción y todo el sistema de las operaciones vinculadas con la inteligencia operatoria concreta.

Ahora bien, la situación se simplifica en forma notable si nos ubicamos en el terreno de la acción y, en especial, en el de la inteligencia sensoriomotriz, fuera de la cual el mecanismo de las percepciones es incomprensible. Se observa entonces que el esquema de Meyerson relativo a los abstractos proyectados en lo real y sobre los que opera la inteligencia corresponde a un proceso esencial (como todos los esquemas meyersonianos), pero que permiten obviar la oscilación demasiado compleja, imaginada por el filósofo, entre lo real y el espíritu.

En realidad: 1º toda acción conduce a esquematizaciones, es decir que los movimientos y las percepciones coordinadas por ella constituyen "esquemas sensoriomotores" susceptibles de aplicarse a nuevas situaciones; estos esquemas son el equivalente activo de los conceptos o de los "géneros", pero se trata de conceptos prácticos y no reflexivos; 2º sin abandonar el terreno de la acción que se ejerce sobre el objeto, y sin necesitar entonces localizarse en el pensamiento para ser luego proyectados en lo real, estos esquemas estructuran los datos asimilándolos a la acción del sujeto; de esta manera imprimen una cierta forma al objeto, lo incorporan a las actividades propias y lo enriquecen así con una serie de relaciones nuevas; 3º al coordinar los esquemas entre sí, la acción constituye, por otra parte, el equivalente de lo que luego estará representado por las operaciones; éstas derivan entonces de la acción y si, como lo dice Meyerson, se ejercen sobre géneros hipostasiados en el objeto, y no sobre el objeto mismo, ello se debe a que el objeto, desde un comienzo, está estructurado y completado por la acción de la que las operaciones proceden. Meyerson tiene entonces razón al considerar que el ejercicio de lo real es más amplio de lo que lo real comporta por sí solo, pero la interacción del sujeto y del objeto se explica por un proceso continuo que se ejerce desde la acción más simple hasta la operación más formal; no es necesario entonces recurrir a un

sistema de oscilaciones, imaginado para remediar la insuficiencia de una definición de la actividad propia mediante la identificación por sí sola.

En particular, el objeto permanente se constituye de este modo activo y no noético. Si la tesis meyersoniana fuese cierta, siempre que existe una percepción debería haber objeto efectivamente; así lo entiende el autor. Ahora bien, el bebé no dispone del concepto de objeto antes de los 8-10 meses, mientras que percibe perfectamente bien y reconoce las personas y las cosas; pero ve sólo figuras o cuadros perceptuales, sin atribuirles aun una permanencia sustancial. Un perro que corre una liebre tampoco dispone del concepto de objeto, pese a lo que supone E. Meyerson; en efecto, no puede imaginar la liebre ni situarla en algún lugar en el espacio, al margen del acto mismo de perseguirla y de las percepciones olfativas y visuales relacionadas con él. Por el contrario, continuando con los esquemas prácticos iniciales, una coordinación más compleja de las acciones permite constituir el concepto de objeto a partir del momento en que los desplazamientos comienzan a ser "agrupados" en sistemas de conjunto que se caracterizan por su composición reversible. Este hecho muestra por sí solo la filiación de las operaciones espaciales ulteriores en relación con la acción y la inteligencia sensoriomotriz. Sin mencionar el aspecto físico del problema, que veremos luego (vol. II, cap. II, punto 1), este ejemplo ilustra así las dificultades de una tesis de la que está ausente la acción y que está obligada a reemplazar el pasaje de la motricidad a la operación mediante un complejo juego de identificaciones racionales y de proyecciones que intervienen desde la percepción.

5. La interpretación logística del razonamiento matemático. La utilización de este admirable instrumento de disección axiomática e incluso de crítica epistemológica, el cálculo logístico, ha llevado, en lo que se refiere a la interpretación del razonamiento matemático, a tres posiciones esenciales que corresponden a tres fases diferentes de la historia de la logística. La primera y la tercera se caracterizan por descubrimientos técnicos que han enriquecido nuestro conocimiento lógico y, como consecuencia de ello, epistemológico; la segunda es interesante sobre todo por la teoría del conocimiento lógico-matemático que permitió formular, sin que, por otra parte, esta teoría esté ligada necesariamente a la utilización de las técnicas logísticas.

Se puede decir, en efecto, que en el transcurso de una primera fase de la logística se ha elaborado una fórmula del razonamiento por recurrencia que permite obviar un principio especial tal como el invocado por Poincaré y que vincula el axioma de inducción completa a la construcción de los números inductivos. Se puede caracterizar este primer período con los nombres de Morgan (como precursor), de Peano y de Russell (en sus primeros escritos). En el transcurso de una segunda fase, la asimilación de la lógica y de la matemática condujo a Wittgenstein y a la escuela de Viena a una concepción puramente tautológica del razonamiento matemático; éste se convirtió en la sintaxis de un lenguaje destinado a expresar simplemente "hechos" (físicos o experimentales). En una tercera fase, que

se inicia con la teoría de la demostración de Hilbert, los progresos de la lógica de las proposiciones permitieron el descubrimiento de Goedel de una irreductibilidad entre el sistema constituido por la aritmética (incluido el razonamiento por recurrencia) y la estructura del cálculo proposicional (bivalente); también inspiraron la investigación de Heyting y de la escuela polaca (Lukasiewicz, Tarski, etc.), de una lógica polivalente y general susceptible de responder a las diversas exigencias de las posiciones asumidas en los problemas del fundamento de la matemática. Sin profundizar la exposición técnica de los trabajos logísticos que caracterizan cada una de estas tres fases, debemos, sin embargo, dilucidar su alcance en lo que se refiere a la epistemología propiamente dicha.

I. "La utilización de la inducción matemática en las demostraciones, escribe B. Russell [19], era, en otra época, una especie de misterio. Nadie dudaba de que era un método suficientemente probante, pero nadie sabía tampoco cómo estaba fundado... Poincaré lo consideraba como un principio de la mayor importancia, mediante el cual un número infinito de silogismos podía condensarse en un razonamiento único. Sabemos en la actualidad que todas estas concepciones son erróneas y que la inducción matemática es una definición y no un principio. Se la puede aplicar a algunos números mientras que hay otros (los cardinales transfinitos) que no permiten su utilización. Definimos los «números naturales» como aquellos que se pueden establecer gracias a la inducción matemática, es decir que poseen todas las propiedades inductivas. En consecuencia, estas determinaciones se pueden utilizar en los números naturales no en razón de alguna intuición misteriosa, de un axioma o de un principio, sino debido a que se presentan como una simple propiedad literal. Si definimos los «cuadrúpedos» como animales que tienen cuatro patas, se deducirá que todo animal que tiene cuatro patas es un cuadrúpedo; el caso de los números sometidos al régimen de la inducción matemática es exactamente el mismo."

Este significativo pasaje de Russell se basa en la definición de las clases "hereditarias" (tales que si n forma parte de ella, $n + 1$ también la integra), y también en los conceptos de sucesor o de predecesor, de cero y de "posteridad de cero", etc. (vol. I, cap. I, punto 7, los conceptos primeros de Peano, que son retomados y precisados por Russell en función de su reducción del número entero a las clases). Ello equivale a decir, y tal es la simplificación esencial que la iogística ha introducido en el transcurso de su primera fase, que el principio de inducción matemática se origina en la construcción de los números enteros (finitos). Tanto cuando se admite la reducción de los cardinales a las clases lógicas como cuando nos limitamos, como lo hace Peano, a agregar el axioma de inducción a los que determinan la sucesión de los números, el razonamiento por

19 B. Russell: «*Introduction à la philosophie mathématique*. Trad. Moreau. Payot, pág. 41 Orig. inglés.

recurrencia se convierte así en la expresión de la construcción de los enteros finitos.

Sin embargo, si bien éste representa un progreso en relación con la interpretación realizada por Poincaré, B. Russell exagera en algo al comparar la serie de los números con la clase de los cuadrúpedos... En efecto, "definir" la primera consiste en engendrarla mediante una ley de composición operatoria que corresponde a una estructura de grupo, mientras que "definir" la segunda supone sólo la intervención de una simple reunión de individuos y no de unidades iteradas. Entonces, sin estar obligados a volver a la "intuición del número puro", el principio particular de la inducción completa sigue siendo irreductible a la lógica de las clases. De este modo, el razonamiento por recurrencia es más fecundo que el silogismo: permite generalizar de cero, o de uno, a "todos", propiedades no atribuidas de antemano a todos los números, mientras que el silogismo se limita a incluir unas en otras clases cuyas partes y el "todo" se originan en simples encajes. Así, incluso los logísticos, en su mayor parte, han reconocido esta fecundidad inherente al razonamiento por recurrencia.

II. Sin embargo, exitoso o fallido (vol. I, cap. I, punto 4) el intento de reducción de los entes matemáticos a las clases y a las relaciones lógicas portaba en sí un germen de justificación que condujo a la segunda fase del análisis logístico. A partir del hecho de que los entes lógicos, considerados en forma aislada (por oposición a los "agrupamientos" a los que hemos aludido, punto 3, cap. I, vol. I), se reducen a la identidad, y del hecho de que la matemática misma parecía reductible a la lógica pura, hemos llegado a la conclusión del carácter "tautológico" de todo razonamiento logicomatemático. La lógica y la matemática se limitarían así a constituir la sintaxis de un lenguaje destinado exclusivamente a expresar "hechos", es decir, comprobaciones experimentales y serían radicalmente infecundas por ser puras sintaxis.

Partamos de lo que se designa como "proposiciones elementales", por ejemplo "este árbol es verde", proposición que no comporta ninguna generalización y se limita a atribuir una propiedad a un objeto. En el interior de tales proposiciones, incluso, se puede distinguir lo que Russell llama "proposiciones atómicas", es decir que no se puede descomponer en proposiciones más simples (se trata de las "Sachlagen" de Wittgenstein) y que se originan simplemente en la aplicación de la negación a ciertos datos inmediatos ("esto no es rojo"). Existirían, entonces, "proposiciones moleculares" que se originan en la aplicación de las operaciones de incompatibilidad a las proposiciones atómicas, y las "proposiciones elementales", por definición, se reducirían a proposiciones atómicas y moleculares consideradas en conjunto. Aclarado esto, una proposición elemental puede ser expresada bajo la forma de una función proposicional: "x es verde" o "$f(a)$" y otros objetos, además de "este árbol", pueden convenir al predicado f; por otra parte, "este árbol" mismo puede comportar otros predicados diferentes de f. De este modo, sin abandonar nunca el terreno de los hechos, sustituyendo los datos unos a otros en el interior de la

proposición, se podrá engendrar el cálculo de las clases y de las relaciones y, combinando las proposiciones entre sí, desarrollar el cálculo proposicional.

La "clase" se convierte entonces en la concepción tautológica, una simple yuxtaposición de "argumentos" que satisfacen al mismo "enunciado". Al respecto, es interesante señalar la evolución de la lógica en lo que se refiere a los entes abstractos. Todavía en 1911 B. Russell pudo escribir un capítulo sobre "el mundo de los universales",[20] cuya teoría imitaba "en gran medida a la de Platón, con sólo las modificaciones que el tiempo reveló necesarias" (pág. 97). Afirmaba en él que "todas las verdades suponen universales y todo conocimiento de las verdades supone el conocimiento directo de los universales" (pág. 100), y admitía, como máximo, que la existencia de los universales constituidos por las "relaciones" es más fácil de "probar estrictamente" que la de las entidades representadas por adjetivos y sustantivos (pág. 102). Llegaba a la conclusión de que una relación como "al norte de" no se encuentra "ni en el espacio ni en el tiempo, no es ni material ni mental" (pág. 105): "subsiste" en lugar de "existir" (pág. 107). En 1919, por el contrario, intenta demostrar[21] "por qué no se puede considerar a las clases como parte del mobiliario último del mundo" (pág. 216) y piensa que "nos acercaremos más netamente a una teoría satisfactoria si intentamos identificar las clases con las funciones proposicionales" (pág. 218).

Ahora bien, una función proposicional es un simple esquema de enunciados posibles: $f(x)$ o (y) $f(x)$. Cuando está saturado por dos variables, constituye una relación, y cuando lo está por una sola, los valores que transforman las funciones en proposiciones verdaderas constituyen una clase. Sin embargo, tanto en estas relaciones como en estas clases sólo se observan enunciados virtuales, que corresponden a datos concretos y directamente comprobables: a "hechos" experimentales. El cálculo de las clases y de las relaciones es entonces sólo la sintaxis de un lenguaje que enuncia hechos. En lo que se refiere a los números cardinales o "clases de clases", a los números ordinales o "clases de relaciones" y a los diversos tipos de entes matemáticos, ellos agregan a los hechos sólo los entes lógicos; también ellos, a pesar de su complejidad aparente, se limitan a vincular tautológicamente entre sí esquemas de comprobaciones posibles.

En lo que se refiere al cálculo de las proposiciones, que combina entre sí los enunciados tomados en conjunto, ocurre exactamente lo mismo. Una implicación tal como $p \supset q$ significa, simplemente, que, si un objeto cualquiera presenta esta propiedad enunciada por la proposición p, presentará también la propiedad enunciada por la proposición q. Las relaciones cuantitativas consideradas por lógica clásica y que contraponen

[20] B. Russell: *Les problèmes de la philosophie*. Trad. Renauld. Alcan, 1923. Obra publicada en inglés en 1911. [Hay versión castellana: *Los problemas de la filosofía*. Barcelona. Labor, 1965.]

[21] B. Russell: *Introduction à la philosophie mathématique*. Trad. Moreau. Payot. 1928. Orig. inglés.

el "todos" al "algunos" y al "ninguno" se reducen, en el caso de una función proposicional saturada por ciertas clases de variables, al hecho de ser "siempre" verdadera, "algunas veces" verdadera o "nunca" verdadera. En cuanto al cálculo fundado en las combinaciones de lo verdadero y de lo falso, él no introduce ninguna construcción real y se limita también a una combinatoria que según los modos de razonamiento matemático o físico considerados es bivalente o polivalente, pero que se reduce aun a una simple sintaxis formal.

Carentes de toda fecundidad, podemos decir incluso que las estructuras logicomatemáticas son ajenas a la verdad. Reducidas al nivel de puros medios de expresión, permiten enunciar verdades reales, que son fecundas por ser físicas y experimentales; estas estructuras, sin embargo, superan a la realidad física sólo en la medida en que una sintaxis constituye el marco vacío de los enunciados verdaderos que tarde o temprano el lenguaje en acto utilizará. Esta sintaxis, sin duda, está regulada en virtud de las proposiciones primeras y de un juego de significaciones simbólicas; sin embargo, según Wittgenstein, las proposiciones primeras se imponen con evidencia porque resultan de la eliminación de combinaciones simbólicas posibles. Los símbolos, por su parte, son imágenes, es decir, hechos que se "asemejan" a otros hechos y el sentido de estas "imágenes lógicas" resulta también de una simple comprobación.

Así, después de haber basado la fecundidad de la matemática en un universo casi platónico de las ideas generales, la epistemología logística llegó a negarla en forma radical: reduciendo el simbolismo logicomatemático a una vasta tautología, le añade a este nominalismo una asimilación del conocimiento real a la simple comprobación del dato sensible; al fin de cuentas, conduce a lo que el propio Wittgenstein designa como una especie de solipsismo, consecuencia inevitable del "empirismo lógico".

Es evidente, sin embargo, que por precisos y, en algunos aspectos, definitivos que sean los descubrimientos técnicos del cálculo logístico, su utilización no implica *ipso facto* la adopción de la epistemología vienesa. Aceptaremos sin objeciones que esta utilización pueda ser fatal para un cierto modo metafísico de pensar mediante conceptos inaptos para toda formulación; incluso coincidiremos por completo con la posición del círculo de Viena cuando limita los modos efectivos del conocimiento a sólo dos tipos: la experiencia y la formalización. Pero entre la realidad física y la deducción logística interviene, necesariamente, el hecho mental. En la exacta medida en la que renunciamos al platonismo inicial de B. Russell, debemos entonces fundamentar el formalismo lógico en la actividad intelectual; se plantea entonces el problema de si la psicología de Wittgenstein y de los vieneses permite realizar correspondencia.

Debemos señalar, en primer lugar, y de la manera más neta que, al margen de su formulación logística, los vieneses adoptaron y construyeron una cierta psicología de las funciones intelectuales: el contacto entre el simbolismo y los "hechos" sólo pudo realizarse mediante dos tipos de afirmaciones, que conciernen las unas al conocimiento (percepción e inteli-

gencia) y las otras a la función simbólica (papel del signo, y papel de la "sintaxis" o del lenguaje en general). Ahora bien, pese a que la formulación lógica es un problema de puro cálculo o de pura axiomatización, estas afirmaciones psicológicas corresponden por el contrario a la experiencia por si sola, es decir, a la experimentación psicológica, y ninguna deducción logística es suficiente para resolver de hecho tales problemas. Para medir el valor de la epistemología "vienesa" debemos ubicarnos entonces en el terreno de los hechos mentales y distinguir con cuidado este problema del que corresponde al valor de la logística como tal.

Ahora bien, podemos intentar determinar a qué "hechos" psicológicos corresponden los "enunciados" formulados por las proposiciones "atómicas" y las estructuras formales de diversos órdenes; nos vemos obligados a reconocer, entonces, que no se trata en absoluto de simples comprobaciones en el transcurso de las cuales el sujeto registraría los datos exteriores y permanecería, por su parte, pasivo; por el contrario, se observa constantemente una acción real del sujeto que actúa sobre los datos en lugar de aceptarlos tal cual: se deduce de ello que los "enunciados" corresponden tanto a operaciones psicológicas como a "hechos" físicos y que, en consecuencia, el mecanismo operatorio reprimido de la "tautología" lógica debe integrarse a lo real como enunciado o, si no, ser reintegrado en la interpretación de los símbolos logísticos como enunciantes.

¿En qué consiste, en efecto, la lectura de un dato inmediato? Si se trata de percepción, se plantea de inmediato una dificultad central: tal como intentamos demostrarlo en otra parte (vol. I, cap. II, puntos 3-4), la percepción es irreductible a toda forma lógica, ya que las relaciones perceptuales no se pueden componer entre sí en forma transitiva, son irreversibles, no asociativas y ajenas a la conservación de las partes y del todo. Cada comparación las modifica y comportan sólo un modo de composición estadística y no racional; por sí solas, las relaciones perceptuales no pueden proporcionar ninguna base a una construcción lógica: para que puedan determinar "enunciados" susceptibles de composición sintáctica, deben estar, en primer lugar, estructuradas por esquemas sensoriomotores semejantes al del objeto permanente, y ser luego conceptualizadas por la integración en un sistema simbólico y representativo. Ahora bien, ambas transformaciones de lo perceptual en un esquematismo logicizable supone la acción o la operación.

En lo que se refiere al concepto de objeto, esencial para el enunciado de las proposiciones más elementales, la creencia de que hay objeto a partir del momento en el que hay percepción se basa en un error psicológico manifiesto: el concepto de objeto constituye el más simple de los esquemas de conservación; esta conservación, sin embargo, lejos de resultar de una pura identificación intelectual (véase punto precedente), supone una coordinación de las acciones de rodeo y de retorno y una organización espacial de los desplazamientos (que preanuncia una estructura de grupo operatorio). En relación con el objeto, entonces, la percepción sólo juega un papel de índice y al reconocer un objeto mediante la vista o el tacto no

nos limitamos a verlo o a sentirlo: vemos o tocamos sólo una parte del objeto, la que actúa como índice del todo que se refiere así a un esquema de conjunto construido y no dado. El "enunciado" lógico más simple, la proposición más "atómica", tal como "esto... rojo", etc., enuncia de este modo una serie de acciones virtuales y no un dato perceptual. Además, la intuición logística a menudo sorprendente de Wittgenstein es mucho más profunda que su psicología: cuando este autor caracteriza los "enunciados" más primitivos mediante negaciones ("no rojo", "no verde", etc.) admite ya con ello la existencia de la construcción operatoria subyacente a los así llamados "hechos" que estos enunciados significarían.

Si nos referimos ahora a "enunciados" más complejos (pese a que caracterizan siempre "proposiciones elementales" de argumento individual, tales como "este árbol es verde"), entra en juego una conceptualización y una simbolización cuyo carácter psicológicamente operatorio y no simplemente "dado" es mucho más fácil de percibir. Comencemos por examinar el predicado: "verde" (o "blanco", etc.). En la época en que B. Russell era platónico, escribió que "el acto de pensamiento de un hombre es necesariamente diferente del acto de pensamiento de otro hombre; el acto de pensamiento de un hombre en un momento dado es necesariamente diferente del acto de pensamiento del mismo hombre en otro momento. En consecuencia, si la blancura fuese así el pensamiento considerado como opuesto a su sujeto, dos hombres diferentes no podrían pensarla y el mismo hombre no podría pensarla dos veces. El carácter común de varios pensamientos diferentes de blancura es su *objeto*, y este objeto es diferente de todas ellas. Los universales, de esta manera, no son pensamientos, pese a que, cuando se los conoce, sean los objetos de los pensamientos".[22] Es evidente que estas objeciones de Russell son irrefutables en lo que se refiere a la blancura perceptual, que, al mismo tiempo, es incomunicable y carece de toda conservación o reversibilidad mentales. Pero también rigen en contra de la permanencia de la blancura física, ya que las mismas ondas luminosas nunca se reproducen dos veces en las mismas circunstancias. "Pensar" la blancura o el verdor, etc., es, entonces, construir un concepto: si se lo pretende estable y susceptible de articularse en "enunciados" lógicos, debemos recurrir entonces al platonismo, a la inteligencia divina, etc., si no, si no se es metafísico, reconocer al pensamiento el poder de conservar sus ideas mediante operaciones reversibles e intercambiarlas por co-operación social, es decir, nuevamente, mediante operaciones reversibles, pero con correspondencias interindividuales. Sólo en este caso el enunciado "este árbol es verde" tendrá alguna significación logística.

En lo que se refiere al tema o argumento de la proposición, es evidente que si se le atribuye a un objeto la cualidad de ser un "árbol", se lo incorpora también a un esquema operacional fuera del cual el enunciado pierde toda significación. Designemos como $f(a)$ la proposición "este árbol (a) es verde (f)". Ahora bien, más aún que la estabilidad del predicado (f), la designación del argumento (a) supone una construcción.

22 *Les problèmes de la philosophie*, *op. cit.*, págs. 106-107. Véase nota 20.

Designar al objeto (*a*) como árbol, en efecto, supone referirse a otros objetos (*b*, *c*, etc.) susceptibles de presentar junto con él algunas funciones proposicionales, es decir, de presentar junto con él algunas cualidades comunes (estar vivo, tener un tronco, etc.) que definen el concepto de árbol. Al margen de una referencia semejante, implícita o explícita, no tiene ningún sentido tratar este objeto (*a*) de "árbol"; esta designación, entonces, supera necesariamente el dato actual y lo conecta con un conjunto de otros "hechos" comparados entre sí. El hecho de que esta comparación o estas relaciones se reduzcan, desde un punto de vista logístico, a la posibilidad de sustituir (*b*) o (*c*) al argumento (*a*) de la proposición *f* (*a*), no excluye en nada el carácter operatorio del acto psicológico que permite tales sustituciones: una operación de reunión o de puesta en relación interviene así en toda función proposicional susceptible de determinar una clase o una relación y todo enunciado relacionado con un objeto conceptualizado supone relaciones semejantes.

Debemos resolver aun el aspecto central de una interpretación nominalista o "sintáctica" de las estructuras lógico-matemáticas: ¿Qué es un símbolo y de qué manera las proposiciones reducidas a un puro lenguaje simbólico designarán lo real correspondiente? Tanto cuando se define el símbolo como una "imagen", como lo hace Wittgenstein, como cuando consideramos la imagen como un "hecho" que "se asemeja" a los hechos que ella significa, no se modifica en nada la naturaleza esencialmente mental del hecho significante, designado mediante los símbolos. Incluso si se admite que la lógica es simplemente un lenguaje, de todos modos un lenguaje se construye y no se descubre mediante simples comprobaciones exteriores, y supone sujetos psicológicos capaces de hablar entre sí y de representarse alguna cosa mediante los signos así elaborados. Psicológicamente, la función simbólica (o capacidad de representar mediante signos e imágenes) explica, si se quiere, el pensamiento, pero además lo supone: más precisamente, lo explica sólo con la condición de implicar sus atributos esenciales; si el pensamiento es sólo un lenguaje, ello se debe a que el lenguaje es un instrumento conceptual. Lejos de suprimir la operación, un sistema simbólico exacto, de este modo, es doblemente operatorio: representa mediante operaciones simbólicas una interacción no de realidades ya constituidas, sino de operaciones reales. De este modo, cuando se reducen las estructuras lógico-matemáticas a una sintaxis no se excluye en nada su fecundidad operatoria. Se mantiene, en particular, la oposición notable basada en el hecho de que el lenguaje propiamente matemático, cuyo carácter tautológico se pretende que admitamos, es infinitamente más rico que la sintaxis exclusivamente lógica: ¿Por qué, entonces, las "tautologías" de la lógica formal son, pese a todo, tan cortas, mientras que las "tautologías" características de la teoría de los números, del análisis o de la geometría exigen volúmenes enteros para que sea posible transcribirlas y símbolos de invención ininterrumpida para su desarrollo?

En resumen, consideramos que es imposible negar que la construcción operatoria, separada de la lógica pura de la matemática por la epistemo-

logía vienesa en el transcurso de este segundo período de la historia de las teorías logísticas, reaparece necesariamente en el terreno psicológico; ello hace resurgir, necesariamente, el problema de su formalización logística. Entre el símbolo logístico y el "hecho" físico se sitúa una acción del sujeto y la operación se presenta así como un cúmulo indispensable entre ambos. Por otra parte, los "vieneses" lo admiten parcialmente en lo que se refiere al hecho de conciencia: lógicamente "tautológica", la matemática, psicológicamente, es considerada constructiva y fecunda. ¿Pero se debe considerar entonces que este sentimiento es una ilusión subjetiva o acaso es epistemológicamente necesario conferir al sujeto una actividad real para vincular los "hechos" a sus "símbolos"?

Tres razones imponen al parecer este segundo punto de vista. La primera es la convergencia progresiva entre el análisis psicológico y el análisis logístico. El desarrollo de la inteligencia se reduce en su totalidad a un pasaje de la acción irreversible a las operaciones reversibles y estas operaciones se constituyen psicológicamente bajo la forma de sistemas de conjunto bien definidos: ahora bien, según las operaciones en juego estos sistemas corresponden a "grupos" matemáticos (la serie de los números, los desplazamientos en el espacio, etc.) o si no a los "agrupamientos" más elementales de clases y relaciones cuya estructura ya vimos (vol. I, cap. I, punto 3). Esta orientación del pensamiento vivo y de los procesos intelectuales concretos en la dirección de los sistemas que constituyen sus formas de equilibrio y que, por otra parte, son directamente axiomatizables en estructuras logísticas constituye un hecho de gran importancia epistemológica: si se sostiene la "unidad de la ciencia", por oposición a la psicología un poco rudimentaria con que se contenta el empirismo lógico, estos datos genéticos representan una prueba en favor de ello.

En segundo lugar, desde el punto de vista estrictamente logístico, sólo se podría reducir la matemática y la lógica a una vasta tautología si todas las relaciones en juego en las estructuras lógico-matemáticas fuesen asimilables a la identidad pura. Ahora bien, no es en absoluto así y la ilusión contraria se originó en un procedimiento de análisis esencialmente atomístico: cuando Russell, por ejemplo, reduce la correspondencia biunívoca de un término a otro a la identidad, omite los diversos modos posibles de correspondencia considerados como sistemas de conjunto [23] (lo que determina la asimilación del número cardinal a una clase de clases). Si se analizan, por el contrario, las totalidades como tales, se comprueba que lo que constituye la relación lógica fundamental no es la identidad, sino la reversibilidad; la identidad entonces se reduce al producto de las relaciones directas e inversas. Ahora bien, la reversibilidad es un concepto esencialmente operatorio y que converge, como acabamos de ver, con la forma del equilibrio de los procesos mentales correspondientes.

La evolución de los trabajos logísticos a partir del segundo período que consideramos, constituye una tercera razón que invita a no reducir la lógica y la matemática a una pura y simple tautología. La hipótesis

23 Véase en este volumen cap. I, § 4.

epistemológica de la tautología general, característica de las "sintaxis" lógico-matemáticas, supone, en efecto, como mínimo, la reducción posible de todos los procedimientos de inferencia o de razonamiento al esquema puramente lógico del cálculo proposicional. Supone como mínimo la posibilidad de reconstruir la matemática como sistema formal único. Ahora bien, los trabajos del tercer período, en particular de Hilbert y de Goedel, cuyas repercusiones examinaremos a continuación, cuestionan precisamente esta unicidad.

III. El tercer período de la logística señala una renovación tanto desde el punto de vista de la reducción de la matemática a la lógica como en lo que se refiere a sus naturalezas tautológicas o no. Los trabajos de Hilbert sobre la axiomatización de la aritmética la preanunciaron y una crisis propiamente dicha se produjo en 1929 con los descubrimientos de Goedel; ella obligó a los antiguos miembros del círculo de Viena a atenuar su posición hasta convertir la lógica en una sintaxis de todas las sintaxis (como lo sostiene en la actualidad Carnap), por oposición a la lengua elemental en cuyo nombre se esperaba, en un primer momento, suprimir los problemas y "cerrar" las axiomáticas.

Después de demostrar la no contradicción de la geometría, apoyándose en la de la aritmética, Hilbert intentó demostrar desde 1904 la no contradicción de la aritmética. Las resistencias que encontró, sin embargo, lo llevaron a modificar la posición inicial de Russell desarrollada por los vieneses en dos puntos: (1) En primer lugar, renunció rápidamente a una reducción pura y simple de la matemática a la lógica; por el contrario, pasando de la lógica a la aritmética y de ésta al análisis, introdujo, en cada caso, nuevas variables y nuevos axiomas. Para formalizar la aritmética, utiliza por ejemplo el cálculo de las proposiciones, los axiomas de la igualdad, los axiomas de recurrencia para la adición y la multiplicación y un axioma próximo al "axioma de elección". Ya no se produce entonces una reducción de lo superior a lo inferior, por ejemplo del número a la clase o del razonamiento por recurrencia a encadenamientos puramente lógicos de inclusiones o de relaciones asimétricas: se produce por el contrario, una subordinación de la matemática simple a la "metamatemática", o sea a una disciplina que reconstruye en forma simultánea la lógica y la matemática y cuyo objeto es el de demostrar la no contradicción y el cumplimiento de los axiomas de la matemática formalizada. (2) En segundo lugar, y a fortiori, Hilbert renuncia a toda interpretación tautológica de la lógica y de la matemática y se encuentra, a pesar suyo en cierta forma, enfrentado nuevamente con el problema de la fecundidad. En efecto, los tres criterios que asigna a toda axiomática acabada son la independencia de los axiomas, su no contradicción y la saturación, es decir, la posibilidad de demostrar todas las consecuencias que se pueden extraer de ellos. Ahora bien, se comprobó que la independencia de los axiomas era tan grande que, incluso en el terreno de la aritmética pura, no logró demostrar ni la no contradicción ni la saturación. Es suficiente señalar que, en el terreno propiamente axiomático, no se podría ya hablar legítimamente de la natu-

raleza tautológica de las conexiones lógico-matemáticas: hemos observado (en II) la existencia de operaciones que se interponen en forma necesaria entre los "hechos" y los enunciados lógicos; ahora bien, estas operaciones son tan ricas que hasta el momento no se ha podido demostrar en absoluto que los axiomas "independientees" propios de la axiomática aritmética misma sean compatibles entre sí.[24]

En efecto, el problema planteado por Hilbert mostró ser mucho más complejo de lo que el ilustre inventor del método metamatemático lo había supuesto. Sobre este punto, como siempre, la crisis así surgida fue más fecunda que todos los dogmatismos. Entre 1929 y 1934 los esfuerzos por demostrar la no contradicción de la aritmetica y en especial el axioma general de inducción completa, en efecto, se enriquecieron con los trabajos de Herbrand, de Gödel y de Gentzen que renovaron en muchos aspectos los problemas, pese a que no lograron los resultados propuestos.

El ensayo de Herbrand[25] consistió en reducir las operaciones de una demostración a operaciones progresivamente más simples, hasta hallar una forma directamente comprobable. Procediendo por discusión finita de términos que no contienen más variables, hasta decidir si esta disjunción es una identidad lógica, llega así a demostrar un cierto número de compatibilidades, pero fracasa ante el axioma general de inducción completa, irreductible a este método llamado de los campos.

En 1929 Gödel realiza un paso decisivo al dilucidar la causa positiva de estas resistencias. De un teorema, luego célebre, relacionado con un sistema de relaciones recurrentes, deduce el resultado esencial de que la no contradicción de una teoría no puede ser demostrada sólo mediante los elementos de esta teoría ni se puede reducir tampoco a la no contradicción de una teoría más simple. La no contradicción de la aritmética no es pues demostrable lógicamente y, en el estado actual de los conocimientos, sólo podría basarse en una demostración metamatemática que recurriera a los instrumentos transfinitos. Por ello, la legitimidad del razonamiento por recurrencia no puede depender de la lógica, no sólo porque carece de una reducción directa posible, sino también porque no puede "saturar" al sistema de las verdades matemáticas: para decirlo de otro modo, no se puede demostrar sólo mediante la lógica la verdad o la falsedad de la generalización a todos los números de una propiedad que se comprueba en el caso del 0 y del número siguiente a un número dado.

Posteriormente Gentzen, en 1934, mediante un método similar al de Herbrand, logra demostrar efectivamente la no contradicción de la aritmética y englobar el axioma general de inducción; pero incorpora a su razonamiento el transfinito y, como él mismo lo dice, recurre a "medios que van más allá de la aritmética".[26]

24 Ello no impide a algunos partidarios y seguidores de la logística vienesa mantener su concepción tautológica. Aún en 1948, M. Boll: *Manuel de logique scientifique*, pág. 523, escribía que la aritmética es una "inmensa prolongación de la lógica" y de una lógica concebida como tautología.

25 J. Herbrand: *Recherches sur la théorie de la démonstration*. Thèse de París, 1930.

26 Citado por Lautman: *Les schémas de genèse*. Hermann, 1938, pág. 148.

Ahora bien, estos desarrollos de la metamatemática hilbertiana presentan muchas enseñanzas lógicas y epistemológicas. El hecho de que no se pueda demostrar la no contradicción de la aritmética aplicando el criterio clásico ($p \cdot \bar{p} = 0$) sin apoyarse en un orden de verdades superior a la aritmética (y que en consecuencia la supone) prueba sin duda la insuficiente coherencia de la matemática o, si no, la insuficiencia de los procedimientos con que cuenta actualmente la formalización logística. Ahora bien, llama mucho la atención que, pese a que en la actualidad es imposible reducirla a un sistema formal único, nadie cuestiona la coherencia interna de la matemática. Se debe proceder a perfeccionar la lógica, ya que no se puede demostrar la no contradicción de los sistemas operatorios característicos de la aritmética mediante sistemas operatorios que caracterizan sólo la lógica clásica.

Este reajuste de la lógica ya se ha iniciado y se lo puede considerar de tres maneras que, por otra parte, quizá confluyan en algún momento. En primer lugar, se ha intentado considerar a la lógica clásica, que es bivalente, como un simple caso particular de lógicas más generales de tres valores (por admisión de un tercero no excluido), de cuatro valores o incluso de una infinidad de valores: el esfuerzo de extensión se realiza entonces sobre el principio del tercero excluido hasta convertirlo en un principio del nº excluido, con la idea más o menos explícita de llegar así a una lógica del infinito más adaptada a la matemática que la de los conjuntos finitos. En segundo lugar, se pueden perfeccionar las metateorías hasta construir sistemas formales que imitan con precisión cada vez mayor las teorías matemáticas, procedimiento que, al fin de cuentas, tiende a convertir la matemática en su propia lógica. Por último se podría —pero al parecer no se ha intentado esta tercera solución— ampliar el principio de la no contradicción: ¿por qué la expresión $p \cdot \bar{p} = 0$, que se basa en la simple complementariedad de p y de $\bar{p}$ en el universo del discurso, no basta para asegurar la no contradicción de la aritmética? ¿Se deberá acaso a que un sistema de encajes susceptibles de permitir una inducción completa y que se basan en los grupos y el cuerpo de los números reales no puede ser encerrado en un sistema de encajes simplemente intensivos, es decir, definidos por puras complementaridades? Estas tres soluciones equivalen así a superar en tres modos diferentes el marco de la lógica bivalente, dada su insuficiencia para absorber la matemática o, incluso, cuando las estructuras lógicas y matemáticas están simplemente intrincadas unas con otras, para proporcionar el criterio de la no contradicción del mixto así constituido.

Los primeros ataques contra la lógica bivalente se originaron en el intuicionismo brouweriano. Resuelto a admitir sólo los entes matemáticos efectivamente construidos, Brouwer se vio llevado a reexaminar el valor de los razonamientos concernientes a los conjuntos finitos y la utilización de las demostraciones por el absurdo. De este modo redujo la lógica a una simple clasificación verbal de los conjuntos finitos y cuestionó resueltamente el empleo del tercero excluido en el infinito, admitiendo la posibilidad de

un *tertium*: lo indemostrable, situado entre lo verdadero, o efectivamente construido y el absurdo. Después de que Wavre demostró la posibilidad de formalizar un punto de vista semejante, Heyting construyó efectivamente una lógica trivalente susceptible de adaptarse al intuicionismo. Además de la lógica probabilista polivalente de Reichenbach y muchos otros ensayos (Gonseth, etc.), la escuela polaca, con Lucasiewicz y Tarski, generalizó estos intentos y construyó un principio del n° excluido y una lógica de una infinidad de valores. Este es un esfuerzo de un gran interés cuyo alcance efectivo, sin duda, no se ha agotado aún. Sin embargo, hasta el presente dos circunstancias lo limitan. Por un lado, pese a que de este modo se preparan nuevos marcos que, al parecer, y sobre todo, se podrán ajustar en algún momento a los problemas de recurrencia, ninguna aplicación decisiva ha justificado aún esta ampliación; muchos autores conservan la impresión de una reducción posible de la polivalencia a la bivalencia simple. Por otra parte, una lógica con una infinidad de valores no es aun una lógica del infinito y no se ha elaborado una "lógica general", subsistiendo por entero el problema de determinar si ella es posible.

En segundo lugar, la ampliación de la lógica se efectúa en el propio seno de las teorías metamatemáticas. Junto con la lógica puramente intensiva representada por las clases y las relaciones, independientemente del número, y por la lógica de las proposiciones bivalentes, se puede concebir una lógica de la matemática que consiste en una combinación de axiomas estrictamente lógicos y de axiomas tomados de la aritmética, del análisis o, sobre todo, de las estructuras transfinitas. Estos agregados, que caracterizan, precisamente, las teorías metamatemáticas, pueden recibir perfeccionamientos indefinidos; por lo general de ellos se espera el cumplimiento de las formalizaciones matemáticas. Pero, incluso si de este modo se supera la lógica pura y no se reasume el ideal ilusorio de la reducción simple de lo matemático a lo lógico, la no contradicción de los sistemas aritméticos sólo se puede demostrar, lo hemos visto, sobre la base de axiomas de orden superior: en mayor grado aún que el fracaso de la reducción russelliana de lo superior a lo inferior, esta resistencia al cumplimiento de la formalización señala entonces, la heterogeneidad de lo lógico y de lo matemático. Existe así una autonomía relativa de los niveles superiores y, en consecuencia, una necesidad de construir una lógica específica que se adapte cada vez más a ellos mediante incorporaciones sucesivas de nuevos axiomas ajenos a la lógica pura. Ahora bien, cuanto más se desarrolla en el plano metamatemático, más imita esta lógica mixta a la matemática, con un mimetismo creciente. A este respecto se puede hablar de una asimilación progresiva de lo lógico y de lo matemático, pero esta asimilación, en este caso, es recíproca y equivale, como siempre, tanto a enriquecer lo inferior mediante lo superior como a traducir éste en las estructuras de aquél. Un ejemplo permitirá comprenderlo. Hilbert demuestra el principio del tercero excluido basándose en un cierto axioma de elección transfinita: $A(tA) \supset A(a)$ significando que si la propiedad A se adecua al objeto elegido (tA) conviene entonces a todos los (a). El ejemplo presentado en el finito es el siguiente: si A es la propiedad de ser corruptible y el

objeto elegido (t A) es el más incorruptible de los hombres, entonces todos los hombres (a) son corruptibles. Ahora bien, es evidente que al otorgarnos la posibilidad de encontrar entre el conjunto de los hombres al más incorruptible de ellos, nos atribuimos con ello el poder de seriar a todos los hombres comparándolos dos a dos (o clases a clases) desde el punto de vista de la relación asimétrica transitiva: "más (o menos) incorruptible". Aplicar este mismo poder a los conjuntos transfinitos significa, entonces, atribuirse el derecho de ordenarlos a todos (no necesariamente de acuerdo con la relación "bien ordenado" sino de acuerdo con un orden simple o un juego de intersecciones previas). En resumen, introducir un axioma como éste equivale a proveerse de más de lo que se necesita para logicizar un sector matemático particular, pero, precisamente, al concederse demasiado se enriquece con ello lo inferior en lugar de reducir lo superior: en ese punto la lógica ampliada de las metateorías deberá duplicar la matemática al insertar la lógica en una metalógica, lo que es más probable que lo contrario; y esto hasta convertir la matemática en su propia lógica. También en este caso se debe considerar el principio de inducción completa como un modo de inferencia específico irreductible a la lógica bivalente.

En tercer lugar, se podría imaginar una solución que equivaldría a ampliar el concepto de la no contradicción hasta convertir la no contradicción característica de la lógica bivalente en un simple caso particular de lo no contradictorio, que caracteriza la lógica de las operaciones reversibles en general. En efecto, ¿qué significa la expresión clásica $p \,.\, \bar{p}$, símbolo de la contradicción interproposicional? Simplemente lo siguiente, que el universo del discurso (llamémoslo z) está repartido en dos clases de valores, que algunas de las cuales presentan la proposición p, otras la proposición $\bar{p}$ y que estas dos clases correspondientes a p y a $\bar{p}$ son complementarias bajo z. Se tendrá entonces, por definición:

$$(1)\ p \,.\, \bar{p} = 0 \qquad (2)\ p \vee \bar{p} = z$$
$$(3)\ \bar{p} = z \,.\, \bar{p} \qquad (4)\ p = z \,.\, \bar{\bar{p}}$$

Si por ejemplo p significa "x vive", todos los x se dividirán en vivos y no vivos ($\bar{p}$) y la no contradicción ($p \,.\, \bar{p} = 0$) equivaldrá a afirmar que ningún x podrá estar al mismo tiempo vivo y no vivo, ya que, por definición, no vivo es complementario de vivo. De ello se deduce que los vivos serán todos los z que no son no vivos (4) y que los no vivos serán todos los z que no son vivos (3).

Este criterio, sin embargo, sólo depende de la complementaridad simple, es decir que su carácter es puramente intensivo[27] y supone sólo las relaciones de encaje de la parte en el todo: la única relación conocida entre una de las partes (correspondiente a p) y la otra parte (correspondiente a $\bar{p}$) es, en efecto, una relación de complementariedad, es decir, una

[27] En lo que se refiere a las definiciones de lo "intensivo" y de lo "extensivo", véase en este volumen cap. I, § 3.

relación que se refiere al todo: $p = z \cdot \bar{\bar{p}}$. ¿Acaso debe sorprendernos, entonces, que una definición exclusivamente intensiva de la no contradicción no sea suficiente para explicar la coherencia característica de los sistemas extensivos y numéricos? Por el contrario, es evidente que sistemas de este tipo superan el marco intensivo y corresponden, en consecuencia, a un criterio de la no contradicción más delicado.

Supongamos, por ejemplo, que en virtud de los axiomas escogidos manteniendo las definiciones ordinarias de los números 2, 4 y 5 se obtenga en un sistema aritmético una proposición tal que $2 + 2 = 5$. Si hacemos corresponder $2 + 2$ a la proposición p y 5 a la proposición $\bar{p}$, se plantea entonces el problema del por qué de su contradicción. ¿Se debe, una vez más, simplemente a que el conjunto (infinito) de los números enteros se divide en dos subconjuntos complementarios, uno de los cuales comporta las relaciones $0 + 4 = 4$; $1 + 3 = 4$; $2 + 2 = 4$; etc., y a que el otro contiene todas las otras relaciones verdaderas concernientes a los 5, 6, 7 . . ., de manera tal que no existe ninguna ecuación que comporte al mismo tiempo $2 + 2$ en un miembro y un número distinto de 4 en el otro miembro? Es evidente que si se razona en forma tan simple, nunca se podrá no sólo demostrar sino tampoco asegurar intuitivamente la no contradicción del sistema. Ahora bien, esto es, aproximadamente, lo que se pretendió cuando se intentó subordinar la aritmética a la lógica. La no contradicción aritmética, por el contrario, depende del hecho de que operaciones generadoras de los números enteros positivos y negativos constituyen un grupo tal que la operación directa $+ 1$ es anulada por la operación inversa $- 1$, bajo la forma $+ 1 - 1 = 0$. Esta composición de la operación directa constituye el correspondiente real, en el plano de los números enteros, de la ecuación lógica $p \cdot \bar{p} = 0$. En consecuencia, será contradictoria toda ecuación numérica en la que las operaciones directas e inversas no se anulen unas a otras: sea $+ n - n \gtrless 0$. De ello se deduce que la no contradicción aritmética comporta otro criterio, mucho más fino, que la no contradicción simplemente lógica o intensiva, que depende de la complementaridad.

¿Pero cuál es, entonces, la relación entre estos dos tipos de no contradicciones? Se refiere, precisamente, al juego de las operaciones directas e inversas y, de manera general, se puede definir a la no contradicción por la reversibilidad, aunque diferenciando siempre los niveles distintos de no contradicciones según la naturaleza de los sistemas operatorios, que se caracterizan todos por su composición reversible. En particular, la no contradicción lógica $p \cdot \bar{p} = 0$ es sólo una composición reversible específica que consiste en anular una operación directa (o afirmación) por su inversa (o negación), lo que equivale a la operación idéntica 0.

En efecto, como lo hemos demostrado en otra obra,[28] sobre la base de la conocida regla de dualidad $\overline{p \vee q} = \bar{p} \cdot \bar{q}$ y $\overline{\bar{p} \cdot \bar{q}} = p \vee q$, toda la lógica de las proposiciones es reductible a un "agrupamiento" único (para

[28] *Tratado de lógica*, § 39.

el concepto de "agrupamiento" véase el cap. 1, punto 3), cuya operación directa es la disyunción $p \vee q$ y la inversa la negación conjunta $\bar{p} . \bar{q}$. Al ser la operación idéntica general (v) 0 y las idénticas especiales ($p \vee p = p$) y ($p \vee z = z$), se puede extraer toda la lógica de las proposiciones de las ecuaciones (1) a (4): $p . \bar{p} = 0$; $p \vee \bar{p} = z$; $p = z . \bar{\bar{p}}$ y $\bar{\bar{\bar{p}}} = z . \bar{p}$. Ahora bien, el "agrupamiento" constituye el único sistema de composiciones reversibles compatibles con las relaciones puramente intensivas de inclusión de la parte en el todo y de complementaridad; de ello se deduce que la no contradicción lógica $p . \bar{p} = 0$ expresa, simplemente, la reversibilidad inherente a este sistema. Es evidente, entonces, que por sí sola ella no demuestra la no contradicción de la aritmética, ya que esta demostración equivaldría entonces a reducir las relaciones extensivas (de parte a parte) y en especial las relaciones numéricas (iteraciones de la unidad e inducción completa) a sólo las relaciones intensivas (de complementariedad y de inclusión) (!)

Por el contrario, si la no contradicción en general se reduce a la reversibilidad en general, cada conjunto de grupos integra su no contradicción y comporta su criterio específico de contradicción, en relación con la operación idéntica del sistema. También desde este punto de vista, la lógica de la matemática se reduce a las estructuras matemáticas.

IV. Ahora bien, a partir de las consideraciones que preceden, es posible formular una interpretación del razonamiento matemático que concilie su fecundidad y su rigor, y que lo distinga también del razonamiento simplemente lógico.

El razonamiento lógico ya es fecundo, puesto que dos operaciones lógicas cualesquiera que se componen entre sí dan una nueva operación no contenida en los componentes. Sea por ejemplo la conjunción ($p . q$): ella afirma, simplemente, la verdad de algunas combinaciones de valores que admiten en forma simultánea p verdadero y q verdadero (por ejemplo $p = x$ es mamífero y $q = x$ es vertebrado). Si, por otra parte, afirmamos ($\bar{p} . q$), admitimos la conjunción posible de q con no p (por ejemplo si x es pájaro es a la vez no mamífero y vertebrado, sea $\bar{p} . q$). Ahora bien, la reunión de ($p . q$) y de $\bar{p} . q$ bajo la forma $[(p . q) \vee (\bar{p} . q)]$ contiene más que ($p . q$) y que ($\bar{p} . q$) considerados por separado: esta reunión disyuntiva, en efecto, significa que q puede ser afirmado independientemente de la verdad o de la falsedad de p. Agreguemos también la verdad de $\bar{p} . \bar{q}$ (ni mamífero ni vertebrado) y neguemos la de $p . \bar{q}$ (mamífero y no vertebrado): esta reunión $[(p . q) \vee (\bar{p} . q) \vee (\bar{p} . \bar{q})]$ con exclusión de ($p . \bar{q}$) significa, entonces, que p supone q (sea $p \supset q$), es decir, afirma una relación esencial entre p y q no contenida ni en ($p . q$) ni en ($\bar{p} . q$), ni siquiera en $[(p . q) \vee (\bar{p} . \bar{q})]$. De esta manera, la fecundidad de la lógica depende de sus composiciones operatorias que supone toda deducción, por tautológica que sea en apariencia.

En lo que se refiere al rigor del razonamiento lógico, él depende de la reversibilidad de las composiciones posibles, ya que (lo acabamos de ver) el criterio de la no contradicción ($p \cdot \bar{q} = 0$) no se reduce a la reversibilidad. El rigor de la lógica de las proposiciones proviene, entonces, del hecho que sus composiciones constituyen no sólo una red o reticulado, sino, realmente, un "agrupamiento" único, es decir, un reticulado ahora reversible gracias a sus complementariedades jerárquicas, y cuya "operación idéntica" fundamental es, precisamente, ($p \cdot \bar{p} = 0$). El rigor no depende entonces ni de la identidad simple $p = p$ ni de la no contradicción considerada como una forma estática independiente, sino de la reversibilidad del sistema de conjunto, cuyas composiciones no idénticas, por otra parte, explican la fecundidad.[29]

Si de la lógica pasamos al razonamiento matemático, comprendemos, entonces, por qué su fecundidad se multiplica, aunque su rigor se base en un principio equivalente, pero de aplicación más afinada.

La fecundidad del razonamiento matemático es mucho mayor que la del razonamiento lógico por la sencilla razón de que en lugar de limitarse a encajar la parte en el todo o de ligar a las partes entre sí sólo por complementariedad o intersección (siendo ésta, nuevamente, una inclusión), el razonamiento matemático construye un conjunto cada vez más rico de relaciones entre las partes, consideradas en sí mismas y sin pasar a través del todo (productos, correspondencias biunívocas, etc.). La imposibilidad. comprobada, de "fundar" el principio general de inducción completa sólo en los recursos de la lógica, se debe, en efecto, a que toda recurrencia numérica supone relaciones directas entre las partes de las totalidades consideradas y a que no es posible reducir tales relaciones a las relaciones entre las partes y el todo (inclusión y complementaridad). En la medida en que el número desborda la clase intensiva, en esta misma medida y por las mismas causas, el razonamiento por recurrencia es irreductible a las composiciones operatorias de la lógica bivalente de las proposiciones. La extensión considerable de fecundidad que caracteriza el pasaje de lo lógico a lo matemático depende, entonces, de la diferencia que separa los grupos numéricos, algebraicos y geométricos, basados en las relaciones directas de las partes entre sí, del simple "agrupamiento" (o composición reversible de las relaciones de parte a todo).

Ahora bien, precisamente esta estructura fundamental de grupo es la que permite el rigor del razonamiento matemático (tan pronto superadas las relaciones elementales de parte a todo que se observan en la teoría de los conjuntos). Si la no contradicción se basa en la reversibilidad, se observará así, a partir de la no contradicción lógica, una serie de niveles de no contradicciones ligados a formas de reversibilidad cada vez más finas en función de la diferenciación de los sistemas. Tal como ya lo señaló G. Juvet, sólo el descubrimiento del "grupo fundamental" en el que

29 Este hecho confluye con el esfuerzo de las lógicas actuales llamadas dialécticas para superar el punto de vista de la identidad o de la no contradicción simples en beneficio de las transformaciones con un sistema de conjunto.

se basa una teoría permite la certeza de su coherencia interna.[30] Esto basta para señalar que el rigor del razonamiento matemático no se puede separar de su fecundidad: para decirlo con mayor exactitud, la fecundidad depende del carácter ilimitado de las composiciones operatorias cuya reversibilidad garantiza el rigor.

De este modo, el análisis del razonamiento matemático prepara y prefigura la solución del problema de los entes abstractos: en la medida en que la matemática desborda la lógica, la existencia operatoria, en efecto, se muestra tanto más efectiva cuanto que de este modo es doblemente irreductible a la tautología pura.

6. Las tesis de J. Cavaillès y de A. Lautman. La evolución de las relaciones entre la logística y la matemática en el tercer período que acabamos de distinguir condujo a dos matemáticos filósofos a una reflexión de conjunto sobre la naturaleza de las operaciones y de los entes matemáticos. Ahora bien, la comparación entre las dos obras [31] de estos autores, aparecidas en el mismo año (1938), es sumamente interesante; en efecto, pese a que inicialmente se orientan en direcciones muy diferentes, convergen en realidad sobre las afirmaciones esenciales de la especificidad del devenir matemático; también convergen en relación con esta especie de dialéctica operatoria, que uno de ellos menciona en el plano del desarrollo de la conciencia y el otro en los dos planos correlativos de la historia y de las esencias platónicas, para explicar la conexión de las construcciones genéticas con las formas de equilibrio "globales".

"Por fecundo que sea, por íntimamente unido al pensamiento matemático verdadero, ¿puede el método axiomático fundarlo? Como característicos de un procedimiento operatorio, los axiomas de un sistema sólo lo describen", dice Cavaillès (pág. 79) y pese a las analogías entre el esfuerzo de Hilbert y el logicismo, las resistencias que se presentan en el problema de la saturación impiden que se las identifique. "De todas formas, la axiomatización se refiere así, en forma doble, a un dato: exteriormente, dato del sistema del que toma sus conceptos; interiormente, dato de una unidad operatoria que se limita a caracterizar" (pág. 88). Este dato interior sería reductible sólo si se lograse probar la saturación. Ahora bien, "no se observa en la lógica ordinaria ningún método para probarla que le otorgue un sentido efectivo; el que ella posee, en realidad, ha sido tomado de la intuición de la unidad del proceso operatorio, que se caracteriza por los axiomas" (pág. 89).

Sin embargo, desde que Hilbert reconoció la imposibilidad de reducir la aritmética a la lógica y se limitó a ambicionar tan sólo una "reedificación simultánea de la matemática y de la lógica" (pág. 90), después que el

[30] G. Juvet: *L'axiomatique et la théorie des groupes*. Actas del Congreso Interno de Filosofía Científica, VI. París, Herman, 1936.

[31] Cavaillès: *Méthode axiomatique et formalisme*. Hermann, 1938; y A. Lautman: *Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématique*. Hermann, 1938.

mismo Carnap renunció a la sintaxis única para admitir que la "matemática exige una serie infinita de lenguas cada vez más ricas" (pág. 166), ya no se puede esperar una reducción pura y simple de lo matemático a lo lógico: "el estrecho corset de las reglas de la lógica clásica abarca incómodamente las experiencias imprevisibles realizadas sobre las fórmulas... La formalización completa conduce paradójicamente a suprimir las independencias operatorias que el método axiomático hubiese deseado salvaguardar" (pág. 175). La lógica, tal como, según Cavaillès, lo estableció Brouwer en forma definitiva, se refiere sólo al discurso y no a los encadenamientos.

En especial, todas las demostraciones de no contradicción "fracasan también ante el axioma general de inducción completa" (pág. 143). Tanto los resultados de Gentzen (con su recurso a una inducción transfinita) como los de Gödel (pág. 164-65) impiden a la lógica "fundar" la matemática. Ni siquiera el logicismo que corresponde a la nueva manera de Carnap "permite esperar solución alguna del problema del fundamento" (pág. 169).

Así, ni la experiencia en sentido físico ni ningún a priori lógico podrían fundar la matemática (págs. 179-180). En lo que se refiere al brouwerismo, "el problema del sentido de una operación tal como lo plantean los intuicionistas emana del prejuicio —de ontología no crítica— que sostiene que el objeto debe ser definido con anterioridad a la operación, mientras que en realidad es inseparable de ella" (pág. 179). ¿En qué consiste, entonces, el fundamento real? En una dialéctica, pero que se confunde con el devenir general de la conciencia, es decir, si comprendemos bien, con la génesis y la historia operatoria.

No se debe buscar esta génesis en el análisis de los estadios iniciales: "En lo que se refiere a la aplicación de la matemática a la «realidad», es decir, al sistema de interacciones vitales entre hombres y cosas, es evidente, después de lo que hemos dicho, que ella ya no concierne al problema del fundamento de la matemática: el niño con su contador es un matemático, y todo lo que puede hacer con él es matemática" (pág. 180). Se debe recurrir, entonces, a la historia operatoria ulterior, como, por ejemplo, al "triple papel de la generalización...: liberación de operaciones de condiciones extrínsecas de su realización, disociación o identificación de procesos accidentalmente unidos o diferenciados; por último, planteo de nuevos objetos como correlatos de operaciones consideradas autónomas. En todos los casos, la fecundidad del trabajo efectivo se obtiene mediante estas rupturas en el tejido matemático, mediante este pasaje dialéctico de una teoría que lleva en sí misma sus límites a una teoría superior que la desconoce, pese y debido a que procede de ella" (pág. 172). Y también: "la ampliación de la conciencia y el desarrollo dialéctico de la experiencia coinciden. Dan lugar al surgimiento indefinido de los objetos en lo que designaremos como *campo temático*: hemos examinado algunos entre estos procesos de surgimiento, las diferentes especies de generalizaciones, las formalizaciones a las que se agrega la *tematización* propiamente dicha: transformación de una operación en elemento de un campo operatorio

superior, por ejemplo topología de las transformaciones topológicas (fundamentales, en forma general, en la teoría de los grupos). Tres especies de momentos dialécticos... la necesidad del surgimiento de un objeto no es nunca aprehensible, salvo a través de la comprobación de un éxito; la existencia en el campo temático tiene sentido sólo como correlato de un acto efectivo" (pág. 177).

"En cuanto al motor del proceso, parece escapar a toda investigación. Este es el sentido pleno de la experiencia, diálogo entre la actividad consciente como poder de intentos sometidos a condiciones y estas condiciones mismas" (pág. 178). "El campo temático, de esta manera, no está situado fuera del mundo sino que es una transformación de éste: el pensamiento efectivo (que exige una conciencia más completa) de las cosas es pensamiento de sus objetos (el pensamiento adecuado de una pluralidad es pensamiento de su número). Si queda un elemento de incertidumbre imposible de eliminar..., su acción no lleva hacia atrás, los gestos realizados en forma efectiva siguen siendo válidos (validez definitiva de los enunciados), sino hacia adelante, para una transformación de lo que se plantea (modificación de los conceptos)" (pág. 179).

Se puede observar que esta tesis converge en alto grado con la posición genética. Hay sólo un punto en el que podríamos invocar los hechos contra Cavaillès, aunque en su favor: si en presencia de su contador el niño ya es matemático, ello se debe a que simultáneamente construye el número y la lógica entera, puesto que su campo temático es ya la transformación de un mundo. "No se observa ninguna causa, escribía Frankel en 1928, que explique por qué las leyes de la aritmética formal deberían corresponder exactamente a las experiencias del niño ante su contador" (pág. 168). La respuesta a este problema no sólo se debe buscar en el desarrollo de la historia operatoria de los niveles superiores: se la puede hallar a partir del análisis de las formas más simples de la actividad. El único método matemático verdadero es, así, el propio método genético.

Ahora bien, por platónico que se considere, A. Lautman no se opone en absoluto a este genetismo operatorio de Cavaillès, a la manera en la que Russell (en la época en que creía en los universales) por ejemplo, difería de Brunschvicg: al reconocimiento del devenir de la conciencia —concebido nuevamente como una génesis esencialmente operatoria— le agrega, simplemente, el análisis de las formas de equilibrio; es al no poder situar estas últimas en la interpretación del desarrollo que las basa en una especie de devenir suprahistórico, en lugar de buscar su explicación en el mecanismo del proceso genético, hasta sus raíces propiamente infrahistóricas.

El desarrollo de la matemática señala la existencia de una cierta realidad (pág. 7) y Brunschvicg, más que cualquier otro autor, desarrolló la idea de que esta "objetividad ... se debía a la inteligencia en su esfuerzo por vencer resistencias que le opone la materia sobre la que trabaja"

(pág. 9). Ahora bien, la filosofía matemática de Brunschvicg, a la que Lautman se refiere así del modo más significativo, no se reduce en absoluto a una psicología de la invención. Deja simplemente de lado toda deducción a priori. "Entre la psicología del matemático y la deducción lógica debe haber entonces un lugar para una caracterización intrínseca de lo real. Este debe participar al mismo tiempo del movimiento de la inteligencia y del rigor lógico, sin confundirse ni con uno ni con el otro, y nuestra tarea será la de intentar esta síntesis" (pág. 10). Planteado de este modo, entonces, el problema consiste en "desarrollar una concepción de la realidad matemática en la que se unan la inmutabilidad de los conceptos lógicos y el movimiento del que viven las teorías" (pág. 12). En efecto, "las teorías matemáticas son susceptibles de una doble caracterización, relacionada una con el movimiento propio de las teorías y la otra con las conexiones de ideas que se encarnan en este movimiento. Estos dos elementos distintos son, en nuestra opinión, los que con su unión constituyen la realidad inherente a la matemática" (pág. 147).

Esta realidad se manifiesta en especial en el estado actual del problema de la formalización. Para formalizar el análisis, no sólo debe ser posible aplicar el axioma debido a variables numéricas, sino también a una categoría más elevada de variables, aquella en la que las variables son funciones de números. La matemática se presenta así como síntesis sucesivas en las que cada etapa es irreductible a la anterior. Además, y esto es capital, una teoría formalizada de esta manera es incapaz de proporcionar la prueba de su coherencia interna; se le debe superponer una metamatemática que tome a la matemática formalizada como objeto y la estudie desde el doble punto de vista de la no contradicción y del cumplimiento" (pág. 11). Pero, insiste Lautman, "éste es sólo un ideal... y sabemos hasta qué punto en la actualidad este ideal parece difícil de alcanzar" (págs. 12-13). Existe entonces una dualidad entre la matemática y la metamatemática, ya que esta última toma en consideración "algunas estructuras perfectas, realizables eventualmente mediante teorías matemáticas efectivas, y ello en forma independiente de saber si existen teorías que presentan las propiedades en cuestión" (pág. 13). Ahora bien, precisamente esta oposición entre lo efectivo en devenir y el ideal que le es superior justifica, según Lautman, la dialéctica del movimiento matemático y de la inmovilidad lógica. Se debe reconocer, al mismo tiempo "la irreductibilidad de la matemática a una lógica a priori y su organización alrededor de esquemas lógicos semejantes" (págs. 147-48). "Se puede decir, incluso, que una dialéctica que se comprometiera en la determinación de las soluciones que estos problemas lógicos pueden comportar se vería llevada a constituir todo un conjunto de distinciones sutiles y de artificios de razonamiento que imitaría a tal punto a la matemática que se confundiría con ella. Esto es lo que ocurre con la lógica matemática en sus desarrollos más recientes. Es imposible concebir en qué consiste el problema de la no contradicción de la aritmética sin rehacer toda la aritmética, pero a partir del momento en el que se intenta realizar una demostración efectiva de su no contradicción, nos vemos obligados a utilizar en esta

demostración medios matemáticos cuya riqueza supera a los de la teoría cuya validez se intenta garantizar. Estos resultados, que debemos a K. Gödel, muestran en forma definitiva que la no contradicción de la aritmética no se puede reducir a la no contradicción de una teoría más simple y, en el estado actual de la ciencia, toda demostración metamatemática de la no contradicción de la aritmética utiliza, necesariamente, métodos transfinitos. Parecía, entonces, que este problema había perdido todo interés lógico, hasta el momento en que M. Gentzen supo encararlo bajo otro aspecto: «Se puede concebir perfectamente —escribe— la posibilidad de demostrar la no contradicción de la aritmética con medios que superen a la aritmética pero que, sin embargo, pueden parecer más seguros que las partes discutibles de la aritmética pura». Se observa entonces cómo el problema de la no contradicción tiene un sentido, incluso si se ignoran los medios matemáticos para resolverlo" (págs. 148-149).

El esquema fundamental de la interpretación de Lautman es entonces el de la subordinación del devenir operatorio a un ideal de conexiones que lo superen. Sin embargo, antes de asumir, a partir de ello, una posición platónica, Lautman realiza un análisis profundo de los aspectos más generales de las "estructuras" matemáticas y esta caracterización estructural le otorga su sentido real a esa conclusión.

Aparentemente, hay una dualidad de puntos de vista entre un método "local" o atomístico, que va del elemento a la totalidad, y el método "global", que va del todo a la parte. "El estudio global, por el contrario, intenta caracterizar una totalidad en forma independiente de todos los elementos que la componen; se ocupa, desde un primer momento, de la estructura de conjunto, asignando así un lugar a los elementos incluso antes de conocer su naturaleza; tiende, sobre todo, a definir los entes matemáticos por sus propiedades funcionales, ya que considera que el papel que juegan les confiere una unidad mucho más segura que la que resulta de la reunión de las partes" (pág. 19). El papel de las totalidades operatorias es así fundamental en el pensamiento matemático actual, en el que constantemente se plantea la alternativa de partir de la estructura total para determinar las condiciones que deben satisfacer los elementos para integrarse en ella o de partir de las propiedades de los elementos e intentar "leer en estas propiedades locales la estructura del conjunto en el que estos elementos pueden ser clasificados" (pág. 29). De ello deriva, en ambos casos, la manifestación de una "influencia organizadora del todo" (pág. 29). A este respecto, Lautman confiesa una preocupación sumamente reveladora en cuanto a las implicaciones que subyacen a su sistema y también en lo que se refiere al papel de la idea de totalidad en el pensamiento matemático contemporáneo: "Observamos así en matemática consideraciones que a primera vista pueden parecer ajenas a ella y aportarle algo así como el reflejo de ciertas concepciones características de la biología o de la sociología. Es evidente que el ente matemático, tal como lo concebimos, presenta analogías con un ser viviente; creemos, sin embargo, que la idea de una acción organizadora de una estructura sobre los elementos de un conjunto es plenamente inteligible en matemática, incluso si, al ser transportada

desde otros campos, pierde su limpidez racional" (pág. 29). Esta "solidaridad del todo y de sus partes" se observa en especial en los conceptos de grupo y de cuerpo[32]: "al proporcionarnos los axiomas a los que obedecen los elementos de un grupo o de un cuerpo nos proporcionamos con ello la totalidad a menudo infinita de los elementos del grupo o del cuerpo".[33] Existe en este caso una verdadera "implicación del todo en la parte" (pág. 30).

Ahora bien, este papel fundamental de las totalidades operatorias (así como la distinción entre las "propiedades intrínsecas" de un ente matemático y las "propiedades inducidas" a partir del sistema ambiente) renueva el problema de las relaciones entre la lógica y la matemática y permite superar, en forma definitiva, el logicismo. "Los lógicos han pretendido siempre (desde el descubrimiento de las paradojas russellianas) prohibir las definiciones no predicativas, es decir, aquellas en las que las propiedades de un elemento son solidarias del conjunto al que pertenece. Los matemáticos no han admitido nunca la legitimidad de esta prohibición, mostrando, a justo título, la necesidad de recurrir, en algunos casos y para definir algunos elementos de un conjunto, a propiedades globales de este conjunto" (pág. 39). La lógica, "en efecto, es sólo una disciplina matemática entre otras y se pueden comparar las génesis que se manifiestan en ella con las que observamos en otros campos" (pág. 83).

La relación entre la lógica y la matemática asume mayor precisión, en especial, en el proceso que Lautman designa como "el ascenso hacia el absoluto" (cap. 3) después de haberlo anunciado mediante la expresión más precisa: "el ascenso hacia su cumplimiento" (pág. 14). Por ejemplo, en el orden de los grupos algebraicos de Galois, se trata del hecho de que la "imperfección" de un elemento de base, en relación con el cuerpo dado, se refiere necesariamente a la estructura de conjunto que es la única. Ahora bien, sólo estos "intentos de organización estructural... confieren a los entes matemáticos un movimiento hacia la realización que permite decir que ellos existen. Esta existencia, sin embargo, no se manifiesta sólo en el hecho de que la estructura de estos entes imita las estructuras ideales con las que se las puede comparar; se pueden comprobar algunos casos en que el cumplimiento de un ente es al mismo tiempo génesis de otros entes; éstas son relaciones lógicas entre la esencia y la existencia en las que se inscribe el esquema de creaciones nuevas" (pág. 80). De este modo, "las teorías matemáticas se desarrollan por su propia fuerza, en una íntima solidaridad recíproca y sin referencia alguna a las Ideas que su movimiento aproxima" (pág. 139). En efecto, "los esquemas lógicos que hemos descripto no son anteriores a su realización en el seno de una teoría" (pág. 149). "El destino del problema de las relaciones del todo y de la parte, de la reducción de las propiedades extrínsecas en propiedades intrínsecas, del ascenso en la dirección del cumplimiento, la constitución de nuevos esquemas de génesis dependen del progreso de la matemática; el filósofo no tiene por qué

32 Un cuerpo es un sistema de dos grupos, uno aditivo y el otro multiplicador.

33 A. Lautman: *Essai sur l'unité des sciences mathématiques*, pág. 9.

elaborar leyes ni prever una evolución futura" (pág. 149). "Todo intento lógico que pretendiera dominar a priori los desarrollos de la matemática desconoce entonces la naturaleza esencial de la verdad matemática, ya que ésta se relaciona con la actividad creadora del espíritu y participa de su carácter temporal" (pág. 147).

De esta manera, se puede aceptar sólo un a priori: "nos referimos a la posibilidad de investigar acerca de un modo de conexión entre dos ideas y describir fenomenológicamente esta intención, independientemente del hecho de que la conexión buscada sea o no operable" (pág. 149). Pero en relación con este aspecto existe una realidad o una objetividad matemática que trasciende al tiempo y al movimiento. En esta tesis general Lautman coincide con P. Boutroux, pero sin embargo se separa de él en el punto esencial relacionado con el hecho de que "el problema de la realidad matemática no se plantea ni a nivel de los hechos ni en el de los entes, sino en el de las teorías. En este nivel, la naturaleza de lo real se desdobla" (págs. 146-147) en un movimiento característico de las teorías y en conexiones de ideas que se encarnan en ellas. Pero, repitámoslo, esta encarnación no se origina en una preformación.

En este aspecto el platonismo de Lautman, que en cierto modo es dinámico o dialéctico, adquiere mayor precisión: "más allá de las condiciones temporales de la actividad matemática, pero en el propio seno de esta actividad, aparecen los contornos de una realidad ideal que es dominante en relación con una materia matemática que ella anima y que, sin embargo, sin esta materia, no podría revelar toda la riqueza de su poder formador" (pág. 150). Esta realidad ideal, por su parte, no sería sin embargo la sede de una progresión sin fin: "La metamatemática que se encarna en la generación de las ideas y de los números no podría proporcionarse a su vez una metamatemática; la regresión se detiene a partir del momento en el que el espíritu elabora los esquemas de acuerdo con los cuales se constituye la dialéctica" (pág. 153).

De no ser por esta posición final, aceptaríamos en forma total el neoplatonismo aparente de Lautman, ya que no sólo presenta pocas contradicciones con el genetismo operatorio, sino que también, además es complementario de la idea de construcción temporal. Es evidente, en efecto, que todo análisis genético o histórico-crítico revela una continua dualidad de planos, sobre la que hemos insistido desde un comienzo (véase introd., punto 5), y tanto en relación con el espacio como con el número: el desarrollo real o temporal de las operaciones y las formas de equilibrio hacia las que él tiende; este equilibrio engloba un conjunto cada vez más rico de transformaciones virtuales. Si se respetan las dos condiciones señaladas por el propio Lautman: ni a priori estructural ni exterioridad del ideal en relación con el desarrollo real, poco importa que esta realidad ideal, implicada en todo equilibrio operatorio, sea descripta en el lenguaje del platonismo.

En especial, es notable observar que la argumentación de Lautman traduce, en otro lenguaje, lo que siempre hemos observado en la génesis,

en lo que se refiere al doble papel de las totalidades operatorias. Por un lado, estas totalidades constituyen las condiciones de estructuración real de las operaciones lógico-matemáticas y representan así sus formas de equilibrio necesarias, en todos los niveles y ya a partir del nivel concreto: a ello se debe que en matemática la comparación de las relaciones de parte a todo con las totalidades orgánicas sea algo más que una simple imagen y exprese una conexión psicológica fundamental entre la organización viviente y la organización operatoria. Pero, por otra parte, estas totalidades juegan un papel normativo: el del aspecto ideal o virtual, cuya incorporación al real es lógicamente necesaria para su total cumplimiento.

Cabe preguntarse, entonces, si la tesis de A. Lautman se encuentra tan próxima a lo que nos enseña el análisis genético (desde los niveles más elementales hasta la formalización metamatemática), a que se debe que llegue a esta especie de afirmación final que es la única parte de platonismo metafísico que interfiere con lo que se podría designar como platonismo genético del autor. La intuición de la reminiscencia y la de la participación son dos intuiciones platónicas fundamentales. Si las totalidades operatorias se encuentran efectivamente emparentadas con las totalidades orgánicas, se podría traducir la reminiscencia en el lenguaje genético de una regresión sin fin a coordinaciones cada vez más primitivas, cuyas operaciones abstraerían sus elementos: esto es efectivamente lo que pensó Lautman. Pero en ese caso la participación, por su parte, no tiene por qué ser limitada por un cumplimiento inmóvil: por el contrario, gracias a una serie de construcciones, de equilibrio creciente, se puede concebir la marcha hacia el ideal. El cumplimiento, entonces, sería sólo el cierre al mismo tiempo regresivo y progresivo del círculo de conocimientos del que A. Lautman intentó evadirse en forma excesivamente brusca. Lo demostraremos a continuación.

7. CONCLUSIONES: LA NATURALEZA DE LOS ENTES Y DE LAS OPERACIONES MATEMÁTICAS. De acuerdo con el principio de la epistemología genética, el problema de la naturaleza de los entes matemáticos sólo puede ser resuelto en función de su desarrollo y comparando este último con el del pensamiento físico o de la biología. Ahora bien, las enseñanzas del estudio de esta evolución y la dirección que él emprendió se pueden resumir del siguiente modo:

1. En su origen, las operaciones lógico-matemáticas proceden de las acciones más generales que podemos ejercer sobre los objetos o sobre los grupos de objetos: ellas consisten en reunir o en disociar, en ordenar o en modificar el orden, en establecer la correspondencia, etc., etc. Ahora bien, ya a partir de este nivel de partida se pueden distinguir en esas acciones dos polos que, por otra parte, desde el punto de vista del sujeto permanecen indiferenciados. Por un lado, estas acciones comportan un aspecto físico, más o menos especializado en función de los objetos mismos: de esta manera, los actos de reunir o de disociar, de ordenar o de cambiar de orden, etc., consisten inicialmente en movimientos reales, efectuados mate-

rialmente o imaginados en pensamiento, etc. Por otra parte, en estas acciones intervienen también coordinaciones generales, que vinculan entre sí los actos que acabamos de examinar: para reunir o separar objetos, ordenarlos o desplazarlos, etc., es necesario que las acciones que se aplican a estos objetos sean reunidas unas con otras, o disociadas, sean ordenadas, puestas en correspondencia, etc. La raíz de las operaciones lógico-matemáticas debe ser buscada en este aspecto de actividad coordinadora de las acciones físicas mismas; si las coordinaciones generales de la acción y de las acciones especializadas son, en un comienzo, indiferenciadas unas de otras, ello no prueba que aquéllas puedan derivarse de éstas.

2. En efecto, las fases ulteriores del desarrollo genético permiten observar una diferenciación creciente y rápida entre las operaciones físicas, cada vez más especializadas en función de los objetos, y las operaciones lógico-matemáticas, cuyo carácter necesario el sujeto aprecia cada vez más a medida que las elabora por medio de elementos tomados de las coordinaciones iniciales de la acción. De este modo, ya a nivel de las operaciones concretas (7-8 años), los agrupamientos lógicos y las estructuras numéricas y espaciales son constituidos en sistemas deductivos diferentes de las operaciones físicas, de los que a nivel de pensamiento intuitivo permanecían parcialmente indiferenciados.

3. A partir del nivel de las operaciones formales, las estructuras matemáticas no sólo continúan diferenciándose en relación con las operaciones físicas, sino que también desbordan en todos los aspectos la realidad experimental. Por un lado, introducen generalizaciones operacionales sin significaciones concretas inmediatas (generalizaciones del número, etc.). Por otra parte, y en prolongación de las operaciones concretas, provocan, desde el comienzo de su formalización, una extensión al infinito que caracteriza desde un primer momento y de la manera más neta la liberación de estas estructuras en relación con la experiencia.

4. Por último, las construcciones axiomáticas que generalizan la construcción formal son elaboradas en forma independiente de la experiencia. Consisten, en especial, en eliminar una propiedad operatoria o una obligación de operar que parecen impuestas por la realidad experimental (p. ej., el quinto postulado de Euclides o el axioma de Arquímedes), de modo tal que las coordinaciones usuales se conviertan en un simple caso particular de las coordinaciones posibles. Ahora bien, a menudo el resultado de este trabajo de depuración conduce a la construcción de estructuras que confluyen no ya con la experiencia tal como se presenta en los comienzos de la elaboración de los conceptos científicos, sino con la experiencia afinada e imprevisible originada en las técnicas físicas más elaboradas.

Determinada por estas cuatro regiones, la curva del desarrollo de los entes matemáticos sigue, entonces, una dirección que al mismo tiempo es neta y paradójica: originada en la coordinación de las acciones que el sujeto ejerce sobre el objeto, se aleja cada vez más de este objeto inmediato, pero sigue conservando el poder de reunirse con él, y lo reencuentra en realidad en todos los niveles de profundidad o de extensión a los que puede conducir su análisis físico. Ello da lugar a los dos problemas esenciales

que el pensamiento matemático plantea: ¿Por qué este pensamiento es constructivo y por qué, al mismo tiempo que va siempre más allá de lo real, se encuentra sin embargo en constante acuerdo con él?

Examinemos, nuevamente, para intentar resolver estos problemas, (I) los estadios iniciales, (II) los estadios ulteriores, y luego, (en III) analizaremos las relaciones de la matemática con la física y la biología.

I. El pensamiento matemático es fecundo porque, al ser una asimilación de lo real a las coordinaciones generales de la acción, es, esencialmente, operatorio.

Es fecundo, antes que nada, debido a que las composiciones de operaciones constituyen nuevas operaciones y a que estas composiciones, cuyas estructuras son develadas por el razonamiento matemático, se confunden en su fuente con la coordinación de las acciones. A este respecto, llama la atención que las estructuras abstractas constituidas por los "grupos" matemáticos y los "agrupamientos" logísticos correspondan a las formas más elementales de la coordinación psicológica de las conductas. ¿Cuáles son, en efecto, las condiciones de equilibrio de un sistema de conductas, tanto cuando se trata de movimientos reales ejecutados por el sujeto o de acciones cualesquiera ejecutadas sobre los objetos? En primer lugar, la posibilidad de combinar dos acciones o dos movimientos en uno solo; luego, la de poder regresar al punto de partida (retorno); también, la de abstenerse de actuar (abstención que equivale al producto de un desplazamiento con su inversa); la de poder escoger entre muchos itinerarios que conducen a la misma meta (rodeos); por último, la de distinguir entre acciones con efecto acumulativo (por ejemplo, hacer muchos pasos consecutivos) y aquellas en las que la repetición no modifica en nada la acción inicial (por ejemplo, releer dos veces el diario o volver a decir las mismas palabras). Ahora bien, es evidente que los cuatro primeros de estos cinco caracteres más generales de la acción constituyen el aspecto común entre los grupos y los agrupamientos: la composición de dos operaciones en una única operación nueva perteneciente al mismo sistema, la conversión de las operaciones directas en operaciones inversas (retorno), la operación idéntica general (operación nula), la asociatividad (desvíos); en lo que se refiere a la distinción entre las operaciones acumulativas (en especial la iteración) y la tautología (idénticas especiales), ella, precisamente, es la que contrapone los grupos matemáticos a los agrupamientos lógicos. La reversibilidad, en particular, que constituye la propiedad más característica de las transformaciones operatorias, matemáticas y lógicas es, por otra parte, la ley de equilibrio esencial que distingue la inteligencia de la percepción o de la motricidad elemental del hábito. Todo el desarrollo de la inteligencia se caracteriza incluso por un pasaje de la irreversibilidad, característica de las acciones primitivas, a la reversibilidad operatoria que caracteriza el estado de cumplimiento de los procesos intelectuales. Para situar el mecanismo operatorio lógico-matemático en su contexto genético real, presenta sumo interés la observación de estas convergencias entre las coordinaciones psico-

lógicas de la acción (con la reversibilidad como criterio del equilibrio) y las estructuras lógicas y matemáticas esenciales.

Una operación como ésta, sin embargo, es ya una creación del sujeto, puesto que consiste en una acción que éste ejerce sobre las cosas. Es inexacto entonces, decir que la formación del pensamiento matemático se debe a una abstracción a partir del objeto, como si los materiales de este pensamiento estuviesen contenidos ya tal cual en la realidad exterior y que bastase con extraerlos para engendrar las relaciones espaciales o numéricas. La acción, en la que la operación consiste en su origen, agrega, por el contrario, nuevos elementos a la realidad y el comienzo de la creación específica de la matemática consiste en esta adjunción. Reunir objetos en una colección o disociarlos de ella es un enriquecimiento que la acción aporta a los objetos; en efecto, si bien la naturaleza por sí sola constituye conjuntos o los disloca, ello no se produce a la manera de una acción libre (libre en el sentido en el que Brouwer caracteriza lo continuo como una serie de elecciones libres), móvil y reversible como las que caracterizan la manipulación o el pensamiento. De la misma forma, construir o medir figuras son acciones tales que agregan algo a la realidad, ya que ésta ignora los elementos más simples de ella, como por ejemplo las rectas o los planos y, en cierta escala, presenta sólo discontinuidad y fluctuaciones.

Pero la realidad exterior permite siempre estas operaciones o estas construcciones; su acuerdo siempre renovado suscita un continuo resurgir del realismo. Este es el segundo carácter del pensamiento matemático: efectivamente, en relación con la realidad física él es creación y le agrega algo a ella, en lugar de abstraer algo o de extraer su materia; sin embargo, en la medida en que se aplica a la realidad, a la que, por otra parte, supera en forma considerable (en todos los aspectos, por ejemplo, en los que interviene el infinito), la experiencia coincide con el esquema matemático. Esta coincidencia plantea entonces un segundo problema que se debe resolver a partir de las operaciones más simples; ello permitirá comprender en qué consiste una convergencia semejante cuando el pensamiento matemático anticipa experiencias, en algunos casos años antes de que se produzcan, y les proporciona marcos antes de que la idea de tales experiencias haya germinado en el pensamiento. Estos tipos de anticipación, en efecto, muestran que el encuentro entre las operaciones matemáticas y lo real no se debe necesariamente a un ajuste recíproco, tal como el acuerdo entre un principio de física matemática y los datos experimentales. Investiguemos, entonces, en qué consiste ella en los casos más elementales, es decir, en aquellos en los que el ajuste recíproco es al parecer evidente, lo que podría ser sólo una apariencia: por ejemplo, cuando un grupo de piedras suma el mismo número 10, cualquiera sea el orden en que se las cuente, o cuando un triángulo rectángulo dibujado sobre un papel presenta, efectivamente, una igualdad aproximada entre el cuadrado de la hipotenusa y el de los catetos.

Las soluciones clásicas de la epistemología filosófica se encerraban en el siguiente dilema: o bien la realidad matemática se impone a priori a la

realidad física, o bien la primera se extrae a posteriori de la segunda. La mayor parte de los contemporáneos, como por ejemplo Poincaré o Meyerson, recurren, por el contrario, a una tercera solución, que consiste en una mezcla de elementos tomados de lo real y de construcciones originadas en el sujeto pensante. En el límite de esta posición, los logísticos surgidos del círculo de Viena reducen el aporte del sujeto a sólo la sintaxis del lenguaje destinado a expresar lo real, mientras que todo lo que supera la tautología pura consiste en una comprobación de la realidad. Ahora bien, la hipótesis de una asimilación de lo real a las operaciones surgidas de la acción nos parece comportar una cuarta solución, que consiste en no atribuir las relaciones matemáticas sólo al sujeto (apriorismo) ni sólo al objeto (empirismo), ni a una interacción actual entre el sujeto y el objeto exterior a él, sino a una interacción entre ambos, interior al propio sujeto.

Una imagen permitirá comprender la diferencia entre esta cuarta posibilidad y las otras tres. Supongamos que el objeto, por lo tanto el mundo físico, sea diferente de lo que es: ¿la matemática y la lógica serían entonces idénticas a lo que son? El apriorismo diría que sí; el empirismo y las soluciones del tercer tipo, en cambio, responderán que no. ¿Pero por qué no? Porque la experiencia física, única fuente (según el empirismo) o fuente parcial (según la tercera solución) del conocimiento matemático impondrá a este último una estructura diferente. La cuarta solución, por el contrario, consiste en admitir que lo que impondría esta modificación no es la experiencia física y por lo tanto la acción exterior del objeto sobre el sujeto, puesto que la lógica y la matemática surgieron de la coordinación de las acciones del sujeto y no de las acciones particulares que lo vinculan con los objetos. Ahora bien, si el mundo físico fuese diferente de lo que es, estas coordinaciones serían modificadas por él a causa de una razón mucho más profunda que la de la experiencia física actual realizada por cada sujeto: ello se debería a que en un mundo diferente, las estructuras mentales y fisiológicas del sujeto en general serían diferentes y a que la vida misma habría surgido de una estructura físico-química diferente de la nuestra. Es entonces desde el interior, y en la medida en que el sujeto basa su funcionamiento en lo real por sus raíces biológicas y físico-químicas, y no en el transcurso del despliegue de sus actividades exteriores, que el sujeto se halla en interacción con el objeto en lo que se refiere a las coordinaciones generales de los actos; así estas coordinaciones concuerdan siempre con lo real del que proceden en su origen. Pero debemos insistir sobre el hecho de que las coordinaciones elementales no contienen de antemano toda la matemática (lo que veremos luego) y sobre todo que ellas intervienen sólo en ocasión de las acciones sobre el objeto, es decir, en la medida en que coordinan las acciones físicas entre sí.

Para comprender mejor la significación de esta cuarta solución, recordemos también la gran diferencia que existe entre los planteos del problema que consideran por un lado sólo las sensaciones o por el otro el pensamiento, y la situación que caracteriza a la adaptación motriz y operatoria. Si los datos disponibles se dividiesen necesariamente en sensaciones (o imágenes-recuerdos, etc.) y en pensamiento, es evidente que sería difícil inter-

pretar el surgimiento de un concepto como el de lo continuo espacial, por ej., sin mencionar, a título de materiales cuya idea es progresivamente "abstraída", el continuo sensible tal como se nos presenta en las percepciones más elementales: puesto que la sensación está entonces suspendida sólo de sí misma o del objeto, surge entonces la hipótesis de que esta percepción de lo continuo sensible proviene de lo real. Sin embargo, y tal como lo afirmaron tantos autores desde Helmholtz hasta Piéron, la sensación es sólo un índice o un símbolo, y se debe determinar entonces lo que ella simboliza. Ahora bien, la sensación o la percepción son siempre parte integrante de un esquema sensoriomotor, en el que el elemento sensible constituye el significante, mientras que el significado, es decir, la significación misma, es determinada por el elemento motor; para decirlo de otra manera, por el factor de acción que deja de lado la antítesis sensación × pensamiento. Por ello, el aspecto esencial de lo continuo, por ejemplo, le corresponde al sujeto, ya que el movimiento continuo de la mirada o de la mano, etc., que sigue al objeto es una acción del sujeto y que esta acción es simplemente acomodada al objeto, sin derivar de él en forma directa. Con mayor razón aún, en las acciones de reunir o de disociar, de ubicar (ordenar) o de desplazar, etc., la percepción de los objetos como tales proporciona sólo índices acomodatorios, mientras que lo esencial reside en el acto mismo, en su reversibilidad operatoria.

Comprobemos nuevamente ahora que las operaciones lógico-matemáticas son precisamente acciones cuyo contenido no deriva de los detalles de los objetos: en efecto, no son sólo transformaciones que caracterizan a una "física del objeto cualquiera", sino "acciones ejercidas sobre el objeto cualquiera", ya que corresponden a las diversas reuniones discontinuas (lógico-aritméticas) o continuas (espaciales) que se pueden construir con objetos cualesquiera, incluyendo sus elementos. Como lo dijo Poincaré, lo geometría comienza con la distinción de los cambios de posición y de los cambios de estado que corresponden, estos últimos, a la física. Ahora bien, pese a que esta distinción debe ser construida, ya que en un primer momento las coordinaciones generales de la acción no son disociables de las acciones particulares que son coordinadas, ella, sin embargo, señala con nitidez el carácter de las operaciones espaciales, independientes de las transformaciones físicas en la medida en la que el sujeto logra diferenciar lo que corresponde a sus acciones particulares y lo que se refiere a su coordinación. Esto se produce con mayor razón aún, en el caso de las operaciones lógico-aritméticas que son independientes tanto de los cambios de posición como de los de estado (salvo que, nuevamente, desde el punto de vista del sujeto sean en un principio indiferenciadas de las operaciones espaciales, antes de ser disociadas poco a poco de ellas).

De todas maneras se deben disipar dos equívocos esenciales: por un lado, las coordinaciones elementales se manifiestan siempre en ocasión de acciones particulares ejercidas sobre los objetos; sin embargo, el hecho de que estas coordinaciones coordinen entre sí acciones físicas no significa que la coordinación de estas acciones como tal derive de ellas ni de los

objetos coordinados por su intermedio; por otra parte, y consecuentemente, es siempre la experiencia la que le enseña al niño las primeras verdades de la lógica matemática; sin embargo, la intervención de la experiencia no significa que estas verdades sean extraídas de los objetos, puesto que el resultado de una experiencia no consiste necesariamente en una lectura de propiedades extraídas del objeto y se reduce, por el contrario, en el caso de las experiencias lógico-matemáticas, a descubrir conexiones necesarias características de la coordinación de las acciones del sujeto. Tanto cuando se trata de las relaciones entre la coordinación general de los actos y las acciones físicas particulares coordinadas por ella, o entre la experiencia lógico-matemática y la experiencia física, el análisis genético nos sitúa en ambos casos ante una indiferenciación inicial y ante una diferenciación que por lo tanto es luego cada vez mayor; sin embargo, los elementos inicialmente indiferenciados, y luego diferenciados no derivan por ello unos de otros: la coordinación lógico-matemática no procede de las acciones físicas ni inversamente, y la experiencia lógico-matemática no deriva de la experiencia física ni inversamente.

Es evidente, en efecto, que durante todos los períodos sensoriomotores e intuitivos (en el sentido en que hemos hablado de intuición preoperatoria) la experiencia es necesaria para la constitución de las operaciones. Antes que dichas verdades sean operatorias y deductivas, el niño descubre mediante la experiencia que seis fichas azules siguen correspondiendo biunívocamente a seis fichas rojas cuando se desplazan los elementos de una de las colecciones correspondientes (acercándolos o separándolos) y que, si la colección A = la colección B, y si B = C, entonces A = C; estas experiencias suponen un desplazamiento de objetos sólidos y con peso, y por lo tanto un "trabajo" (= desplazamiento de una fuerza), es decir, una acción física que se ejerce en un campo gravitatorio que se caracteriza, a su vez, por un cierto espacio solidario de la gravitación como tal. Sin embargo, al coordinar de este modo acciones físicas en el transcurso de experiencias propiamente dichas, el niño no se ha limitado a descubrir los caracteres físicos de los objetos y de su campo: se dedicó a leer el resultado de la coordinación de sus propias acciones. De este modo, y por paradójica que parezca esta afirmación, la experiencia no consistió o no consistió sólo en un aporte del objeto al sujeto, sino en una utilización de los objetos por parte del sujeto, en el transcurso de ensayos que él realizó, en realidad, sobre sus propias acciones. Los objetos, esencialmente, le han enseñado que la coordinación de las operaciones tiene éxito, que 6 es siempre 6, y que la relación de igualdad es transitiva, mientras que investigando, por ejemplo, el modo en que los cuerpos se comportan bajo el efecto de la gravedad o de una fuerza centrífuga, el niño habría extraído realmente su conocimiento del objeto. Comprobar que la composición de las acciones tiene éxito presenta, en efecto, una significación completamente diferente de la de informarse de la existencia de una propiedad física: ello significa que la realidad coincide con esta composición y no que produce un resultado exterior a las acciones. Al observar las igualdades 6 = 6,

o 6 (A) = 6 (B) = 6 (C), el sujeto, simplemente, descubre que sus acciones de contar (1, 2, ... 6), o de poner en correspondencia, etc., enriquecen los objetos con relaciones nuevas, a las que ellos se prestan; también, que estas relaciones pueden ser conservadas e incluso compuestas en forma transitiva, independientemente de los desplazamientos: de este modo, la experiencia conduce al sujeto a disociar la coordinación de sus acciones de las propiedades físicas del objeto, mientras que, al imprimir un rápido movimiento de rotación a una masa de dimensiones medias, descubriría un efecto físico originado en el objeto como tal. Del mismo modo, al hacer girar, sucesivamente, en 180° detrás de una pantalla una varilla de hierro que atraviesa tres objetos A, B y C, el niño, antes de deducirlo, descubre que el orden directo ABC se invierte en CBA, que el orden CBA se invierte a su vez en ABC, y sobre todo, que si A y C se encuentran, alternativamente, en primer lugar, nunca sucede lo mismo con B. Así, una vez más la experiencia le enseña al sujeto resultados que a partir de los 7-8 años deducirá bajo la siguiente forma operatoria: la inversión de la operación inversa conduce necesariamente a la obtención de la operación directa, y, si B está situado entre A y C, también lo está, necesariamente, entre C y A. Sin embargo, y también en este punto, la experiencia se relaciona en menor grado con lo real que con la coordinación de las acciones del sujeto, ya que esta coordinación agregó algo a los objetos: la composición reversible; lo real, en efecto, tal como lo señaló Duhem, no es reversible sino tan sólo revertible, y nunca es necesario sino que está determinado sólo en grados diversos. Para enderezar una varilla, se requiere la intervención de fuerzas, experimentar un ligero cambio de temperatura (tal que una parte de la energía se disipó en calor), etc., pero la experiencia no se efectuó en relación con esos aspectos físicos, parcialmente irreversibles: ella tuvo como objeto la coordinación reversible de las acciones del sujeto, a la que lo real en sus grandes líneas se prestó, con la condición de no ser demasiado exigente; esta coordinación engendró la necesidad de las relaciones construidas por ella, ya que nada es menos necesario que la cohesión molecular de sólidos que rodean una varilla metálica. También en este punto, entonces, las operaciones constituyen un esquema de asimilación acomodado con bastante exactitud a lo real, en una cierta escala, pero que no proviene de él. Y a ello se debe que la acción material sea luego innecesaria para el mecanismo operatorio que funcionará, con mucha mayor precisión, simbólicamente y en pensamiento.

Sin embargo, todos los epistemólogos que reducen el conocimiento a los dos polos del pensamiento y de la sensación, responderán que la acción es exterior al pensamiento y pertenece ya a la realidad exterior: la acción, se suele decir, es un dato de la experiencia ajeno al pensamiento reflexivo y que se conoce sólo gracias a las sensaciones internas o musculares, es decir que reposan, como la pura experiencia física, en puras sensaciones. En este punto, efectivamente, reside el nudo del problema. Si se descuida el papel esencialmente simbólico de las sensaciones, así como la continuidad entre los movimientos del organismo y las operaciones del pensamiento, es obvio

que la acción se debe situar en la realidad experimental y que la matemática proviene en parte de esta realidad; por el contrario, si se considera que la acción sensoriomotriz es el punto de partida del pensamiento y se distingue el movimiento de su significante simbólico constituido por la sensación cinestésica, poco importa que conozcamos subjetivamente nuestros movimientos y su coordinación (del mismo modo que de nada sirve introspeccionar el mecanismo psicológico de la inteligencia lógica para regular su correcto funcionamiento, y el mismo permanece en parte "inconsciente"): la acción, entonces, es la expresión del sujeto cognoscente y no de las realidades exteriores al pensamiento, y la operación matemática es un esquema de asimilación activa acomodado simplemente a lo real y no extraído de él.

En resumen, en su origen los esquemas coordinadores de acciones son suficientes como para engendrar las operaciones lógicas y matemáticas, sin tomar su material del objeto. Sin embargo, son acomodados constantemente a lo real, aunque a través de una acomodación activa y no pasiva, es decir que completan la realidad física al proporcionarle un sistema de relaciones que concuerdan con ella sin ser extraídos de la misma. Si ello es así, se debe a que las operaciones lógico-matemáticas actúan sobre lo real sin transformar el estado de los objetos, ya que se limitan a las modificaciones (reales o virtuales) de posición o de unión, y son independientes de las acciones físicas en juego, simplemente coordinadas mediante tales operaciones y que no son solidarias de esta coordinación.

II. Una vez dicho esto, los mismos dos problemas de la construcción de los entes lógico-numéricos o geométricos y de su concordancia con lo real se observan en todas las etapas del desarrollo del edificio matemático, y no sólo en el punto de partida; sin embargo, a partir de un cierto nivel se plantean en forma mucho más paradójica; en efecto, esta construcción supera por un lado a lo real cada vez en mayor medida; por otra parte, entre los marcos engendrados de este modo por vía deductiva, se observan algunos que vuelven a encontrar lo real en el momento de los progresos ulteriores de la experiencia física, es decir, con una anticipación a menudo considerable del marco sobre su contenido y sin que ningún hecho exterior haya podido servir de modelo en el momento de la creación del primero.

En primer lugar, cabe preguntarse cómo es posible que teniendo como fuente las coordinaciones generales de nuestras acciones, los entes lógico-matemáticos logren superar lo real. Se lo comprende de derecho, ya que pese a que estas coordinaciones conectan entre sí acciones ejercidas sobre la realidad, la coordinación como tal no toma sus elementos de los objetos mismos, considerados en su carácter físico. El hecho de que, en un comienzo, la experiencia sea necesaria para el desarrollo de estas coordinaciones, no prueba, como acabamos de verlo, que el esquema de estas acciones sea extraído de lo real: la experiencia concreta es en realidad indispensable, del mismo modo en que una figura permite la comprensión de una demostración. Pese a que la coordinación lógico-matemática constituye esquemas de acción eficaces sobre la realidad efectiva, tal como se

lo descubre progresivamente bajo las apariencias sensibles, a este respecto se debe invertir la relación que se suele establecer entre el concepto "abstracto" que constituiría un "esquema", es decir, un significante, y la realidad sensible que sería el modelo y el significado al que este esquema corresponde: en realidad, lo sensible (en la percepción, la imagen y la representación intuitiva) es lo que constituye el símbolo, es decir, el significante; por su parte, el esquema motor u operacional que alcanza lo real más allá de lo sensible es el significado mismo. Es natural, entonces, que, habiendo alcanzado un grado suficiente de elaboración, el sistema de las operaciones pueda funcionar sin simbolismo sensible, es decir, superando las realidades percibidas. Esto es lo que vemos prepararse en todas las etapas del desarrollo operatorio del individuo y que la historia de la matemática muestra en cada nueva etapa de su desarrollo.

¿Pero cómo explicarse el detalle de esta elaboración operatoria, cada vez más diferenciada y compleja? En un primer momento, en efecto, las coordinaciones elementales no contienen en absoluto el conjunto de los entes lógico-matemáticos en estado preformado, y no se puede identificar el núcleo funcional presente en la organización psicofisiológica con un a priori trascendental cuyas estructuras formales estarían todas preparadas, aunque se revelasen sólo en forma progresiva. Las coordinaciones elementales de la acción sólo comportan, en efecto, un esquematismo práctico, fuentes de conceptos o relaciones motrices (si podemos expresarnos de esta manera, por analogía con los conceptos representativos), de una cuantificación muy reducida fundada en el ritmo de la acción y de una organización espacial que tiende hacia la forma de grupo. A partir de estos elementos sensoriomotores, el pensamiento representativo extrae luego un esquematismo de clases y de relaciones, el número entero y algunas estructuras espaciales. Sin embargo, a partir de este pasaje de lo sensoriomotor a lo conceptual, que precede en mucho a la producción del pensamiento científico, se observa ya, en forma clara, que las estructuras del nivel superior no están preformadas sobre el nivel inferior: el pensamiento naciente extrae de las coordinaciones motrices, exclusivamente, algunas relaciones funcionales de encaje o de orden, aunque no articuladas y que sirven como elementos de una nueva construcción. Existe entonces, simultáneamente una abstracción reflexiva de materiales tomados del nivel inferior y elaboración de una estructura que los engloba articulándolos y generalizándolos de acuerdo con nuevos modos operatorios. Ahora bien, este proceso genético de abstracción a partir de la acción, así como de reflexión (en el sentido propio del término) y de construcción combinadas corresponde, precisamente, a lo que se observa en todos los niveles de la generalización matemática. Las generalizaciones del número no están contenidas de antemano en el número entero, sino que proceden de la organización de las operaciones ($+$ y $-$ en el caso del número negativo, $\times$ y: en el del fraccionario, n^n y $\sqrt{\ }$ en el de los imaginarios, etc.), es decir, de nuevas estructuraciones que se construyen abstrayendo del número entero algunos de sus elementos operativos descubiertos por disección reflexivas. El nú-

mero entero, por su parte, ha sido abstraído del mismo modo de las clases y relaciones reunidas y los tres han sido construidos también en forma similar a partir de elementos sensoriomotores. Sería entonces absurdo considerar que el número complejo $(a + bi)$ se encuentra preformado en los ejercicios reflejos de un recién nacido; sin embargo, un proceso continuo de abstracción reflexiva y de construcción operatoria vincula las coordinaciones motrices iniciales con las estructuraciones lógico-matemáticas superiores. Por otra parte, lo que en este campo del análisis y del número parece paradójico se acepta con mucha mayor facilidad en el terreno del espacio; en éste las generalizaciones no euclidianas y la multiplicación de las dimensiones deben ser situadas, sin duda, en la prolongación de la organización sensoriomotriz inicial. No por ello se debe considerar que los hiperespacios están preformados en los movimientos y las percepciones del feto.

En resumen, la construcción inagotablemente fecunda de la matemática se basa en un doble movimiento de generalización operatoria que crea las nuevas estructuras mediante elementos anteriores, y de reflexión o de diferenciación que extrae estos elementos del funcionamiento característico de los niveles inferiores. Rudimentarias y aproximativas en su punto de partida, las coordinaciones prácticas que se encuentran en el origen del pensamiento se continúan, de este modo, en coordinaciones cada vez mejor formalizadas y cada vez más abstractas; en efecto, la abstracción que las caracteriza es una abstracción a partir de las operaciones e incluso de las acciones anteriores y no a partir del objeto. De todos modos, y como es natural, las primeras coordinaciones se estructuran siempre a partir de una acción sobre el objeto y este progreso, tanto reflexivo como generalizador, no se realiza en virtud de un desarrollo inevitable o de una sucesión de actos gratuitos. Los actos gratuitos se hacen posibles sólo una vez constituida la ciencia. Y también, en la historia de la matemática, se produjeron una gran cantidad de descubrimientos que se realizaron en función de los problemas concretos planteados al matemático por la experiencia física o incluso química, biológica y económica. Es esa conexión tan frecuente entre las nuevas coordinaciones y la acción experimental la que proporciona la ilusión de que las estructuras matemáticas consisten en modelos simplificados o esquemas de una realidad dada; en ciertos casos, efectivamente, la teoría es edificada con el objetivo preciso de construir tales esquemas. Sin embargo, el hecho de que una coordinación intelectual vincule siempre entre sí acciones reales o posibles no quiere decir que la coordinación haya sido extraída de la experiencia; lo que hemos dicho (en I) en relación con la génesis de los entes matemáticos elementales tiene vigencia, a fortiori, en el caso de los esquemas superiores. Cuando el matemático encara un problema de física y se esfuerza por hallar un instrumento operatorio que se adapte a las transformaciones de lo real de modo tal que constituya al parecer una copia de él, actúa del mismo modo en que lo hace el pintor o el músico al tomar su inspiración de la realidad: ésta, como se suele decir, "le da ideas", pero, por realista que sea, él toma de ella sólo

"ideas", es decir, que, en lugar de limitarse a registrar fotografías o discos sonoros, reconstruye lo real asimilándolo a él.

Esto nos conduce a un segundo problema: ¿En qué se origina esta concordancia permanente entre las operaciones lógico-matemáticas y las transformaciones de lo real, hasta el punto en que las primeras puedan imitar las segundas, y cómo puede ser que, en los casos, mucho más numerosos aún, en los que el marco matemático supera a lo real actual, éste pueda ser llenado a posteriori gracias a nuevas experiencias? Pese a esta liberación gradual respecto de la realidad física, e incluso, se podría decir, a causa de ella, algunas estructuras matemáticas elaboradas por puro deseo deductivo de generalización abstracta, sin ninguna consideración experimental, confluyen a posteriori, con la realidad: como dicen los biólogos, están "preadaptadas" a resultados de experiencia imposibles de prever en el momento de su construcción. A nuestro parecer el aspecto esencial de toda interpretación concerniente a la naturaleza de los entes matemáticos está representado por este problema crucial de la anticipación de lo real por los marcos lógico-matemáticos abstractos, tan próximo (desde el punto de vista de una epistemología genética) del problema biológico que Guyénot llamó de "funcionamiento profético" [34] del organismo y Cuénot de la "ontogénesis preparatoria del futuro".

La solución habitual de este problema central consiste en decir que la matemática toma de la experiencia algunos de sus elementos de la génesis de los entes abstractos y es natural, entonces, que encuentren al fin de cuentas la experiencia. Pero es fácil advertir el carácter superficial de esta respuesta, ya que no se trata, precisamente, de la misma experiencia al comienzo y al final: la experiencia, anticipada sin saberlo, que, a posteriori, ocupa un marco matemático, contradice, en efecto, las experiencias iniciales de las que se pretenden extraer los conceptos primitivos. De este modo, la concordancia entre el espacio no arquimediano y algunos datos microfísicos no puede ser explicada mediante la hipótesis de que el continuo arquimediano o metrizable sería tomado de la experiencia sensible puesto que, precisamente, la experiencia microfísica contradice en este punto a la experiencia inmediata. En efecto, el hecho de que Veronese haya podido construir un continuo dejando de lado el axioma de Arquímedes (de acuerdo con el cual, si se transporta un cierto número de veces el segmento AB a lo largo de una recta, siempre se dejará atrás en algún momento un punto cualquiera C situado sobre esta línea más allá de B), y de que este modelo haya sido utilizado como representación microscópica, no se debe a que el niño o el sentido común hayan tomado de la experiencia física (macroscópica) la idea de que toda recta puede ser medida por la iteración de uno de sus segmentos. Por el contrario, el modelo no arquimediano llegó a constituir un marco preadaptado a un sector de experiencia que contradecía esta realidad habitual al lograr liberarse de la realidad determinada.

[34] E. Guyénot: "La vie comme invention", *L'invention* (IXᵉ Semana Intern. de Síntesis). Alcan, 1938, pág. 188.

Para explicar la convergencia, después de anticipaciones involuntarias, entre la matemática y lo real, se deben suponer, entonces, entre estos dos términos, relaciones mucho más profundas que aquellas de que dispone la experiencia física de cada sujeto. La hipótesis se vería aun más debilitada si se apelase a una "herencia de lo adquirido"; en efecto, aun si se admite que la experiencia geométrica de los gusanos o de los moluscos se haya transmitido al hombre (mediante una herencia de lo adquirido poco probable en este caso particular) la misma nos habría ayudado a concebir solamente un espacio de dos dimensiones, pero no habría explicado ni a Riemann ni a Lobatchevski. En este punto la indisociable conexión entre el sujeto y el objeto, interior al sujeto, asegura una conexión entre ambos más sólida que la que se origina sólo en la acomodación. Si se invoca sólo la acomodación a lo real de los esquemas de acciones o de pensamiento, sería paradójico que la deducción geométrica, contradiciendo los datos perceptuales y representativos, que han caracterizado sus acomodaciones iniciales, termine por construir marcos que corresponden a una realidad exterior más profunda y más general que la de nuestro medio con sus aproximaciones limitadas. La acomodación de los esquemas espaciales, en efecto, corresponde a un medio caracterizado por una cierta escala de dimensiones y velocidades: ¿Cómo explicar, entonces, que su generalización, haciéndolos salir de este marco, confluya con otra realidad, determinada por otra escala e insospechada en el momento de las acomodaciones primitivas? Se lo puede explicar si se admite, por el contrario, que el contacto entre el sujeto y lo real está asegurado desde el comienzo, no gracias a las experiencias individuales ni a una problemática transmisión de la experiencia ancestral, sino debido a que la estructura psicofisiológica del sujeto se origina en la realidad física, al mismo tiempo que ésta da origen a las coordinaciones sensoriomotrices y luego intelectuales que culminan en la deducción lógico-matemática. En lo que concierne a lo real, en efecto, el cerebro y el pensamiento pueden imaginar tanto ideas verdaderas como falsas, al mismo tiempo que, a su vez, están regulados por leyes biológicas y físico-químicas; por el contrario, cuando lo que está en juego no es el pensamiento de los objetos particulares sino la aplicación de los procedimientos generales de coordinación que caracterizan a toda composición motriz o mental, una vez que alcanza el estado de equilibrio, es evidente que cuanto más generales sean estas coordinaciones, más se adaptarán a lo real, ya que emanan de la realidad física por intermedio de la realidad biológica.

Se responderá sin duda que se impone entonces la alternativa siguiente: o bien estas coordinaciones, que se entroncan en lo real a través del interior del sujeto en general y reencuentran lo real en las actividades exteriores de cada sujeto individual, se reducen a un a priori y a la "armonía preestablecida" invocada por Hilbert en la solución de este problema, o bien estas coordinaciones no contienen de antemano todas las operaciones lógico-matemáticas y no explican mejor, en este caso, la concordancia final entre la matemática y lo real que la hipótesis de una acomodación individual a la experiencia.

Se recuerda (vol. I, cap. II, punto 6) cómo Hilbert, después de observar que existe un "paralelismo importante entre la naturaleza y el pensamiento" (art. citado, pág. 26), lo explica mediante una armonía preestablecida: al mismo tiempo que corresponde a las leyes más profundas de lo real, un cierto residuo intuitivo constituiría, de este modo, un a priori para el pensamiento: "Se ha observado, por ejemplo, que, ya en la vida cotidiana, se emplean métodos y conceptos que exigen muchas abstracciones y que no son comprensibles como aplicación inconsciente del método axiomático" (ibíd., pág. 25). En otras palabras, ¿no es acaso lo mismo que afirmamos en lo que se refiere a las coordinaciones psicofisiológicas, que constituyen simultáneamente el punto de unión interior del sujeto y de la "naturaleza", así como el punto de partida de la construcción lógico-matemática? Ciertamente que no, ya que los conceptos de a priori, de armonía preestablecida y de aplicación inconsciente del método axiomático suponen un doble realismo estático: la matemática y la lógica serían, al mismo tiempo, inmanentes a la realidad física y datos ya constituidos en el punto de partida de la vida mental. Ahora bien, en nuestra hipótesis, las operaciones lógico-matemáticas se aplican a lo real dado en la experiencia y lo enriquecen sin estar contenidas en él, y proceden de las coordinaciones mentales y fisiológicas mediante un proceso al mismo tiempo constructivo y regresivo, sin estar preformadas en un comienzo.

Pero reaparece, entonces, la segunda rama de la alternativa: al no estar preformadas en las coordinaciones iniciales, ¿cómo las generalizaciones matemáticas superiores, que superan a la realidad percibida o concebida en los estadios inferiores, confluirán con lo real en el caso de experiencias físicas más profundas? Ello se debe, al parecer, a tres razones conjuntas, las dos primeras de las cuales fueron ya examinadas en (1). La primera es que las coordinaciones mentales que engendran las operaciones lógico-matemáticas elementales son el resultado de una reorganización de elementos tomados de las estructuras elementales, y ello en forma indefinida (continuidad que está asegurada por la de los ciclos asimilatorios), hasta las interacciones elementales de la morfogénesis orgánica y de la realidad física: el punto de partida orgánico de la construcción mental, por independiente que sea de la experiencia individual, se entronca de este modo en el universo físico, sin que, por otra parte, podamos conocer las modalidades de ello hasta que no se hayan resuelto los problemas biológicos centrales. La segunda causa reside en el hecho de que la construcción matemática es, al mismo tiempo, constructiva y regresiva, y toda generalización nueva se apoya en una reelaboración de los axiomas iniciales: ahora bien, cuanto más alto remonta este proceso reflexivo, más converge la reconstrucción axiomática con el análisis genético. De este modo, las nuevas construcciones que concuerdan en forma imprevista con las experiencias físicas se originan en una recombinación de elementos operatorios de más en más primitivos genéticamente, que las acciones más simples sobre la realidad inmediata habían conducido inicialmente a organizar de otro modo. A los dos precedentes se le agrega entonces un tercer factor. A la vez constructiva y reflexiva, es decir progresiva y regresiva, la elabo-

ración de las operaciones o conceptos lógico-matemáticos procede mediante equilibraciones sucesivas y, si una forma de equilibrio constituida por un sistema operatorio superior no está contenida en un sistema inferior más limitado y menos equilibrado, el pasaje de lo inferior a lo superior, sin embargo, está condicionado por la necesidad de integrar algunos elementos del primero en el segundo y de realizar un equilibrio más amplio y más móvil, al mismo tiempo que remonte más alto en el análisis de los elementos. Todo nuevo sistema operatorio se caracteriza de este modo por una forma de equilibrio más amplio, que engloba nuevas operaciones virtuales (en el sentido en el que se habla de "movimientos virtuales") además de las que han sido efectivamente realizadas: sin que este hecho suponga una preformación de los sistemas nuevos en los sistemas iniciales, supone, sin embargo, una cierta línea directriz, determinada por la obligación de conservar estos últimos a título de casos particulares y esta línea es recorrida en ambos sentidos de la construcción generalizadora y del análisis regresivo. La concordancia final con lo real se explica así por una especie de "ortogénesis", como se dice en biología, aunque imposible de caracterizar de antemano, salvo por un aumento de reversibilidad; en efecto, la única regla común que se impone a las nuevas construcciones es la de integrar las precedentes mediante un vínculo de reciprocidad (y por lo tanto de reversibilidad), lo que constituye la condición funcional de todo equilibrio.

Se comprende, entonces, por qué las operaciones lógico-matemáticas se acomodan en forma permanente a los objetos, al mismo tiempo que los asimilan al sujeto: ello se debe a que el ciclo de asimilación constituido por las coordinaciones iniciales de las que estas operaciones proceden reside en el punto de unión entre las leyes funcionales más generales del organismo y los caracteres más generales de los objetos. El cuerpo propio, en efecto, es, al mismo tiempo, un objeto como los otros, determinado por las leyes de lo real y el centro de una asimilación de los otros objetos a su actividad. A partir de ello, en la medida en que actúa de acuerdo con las formas más elementales de composición (encajes, orden, etc.), sus acciones expresan, al mismo tiempo, las exigencias del universo que lo determina desde el interior por su constitución de ser viviente, y la organización impuesta por la acción y el pensamiento al universo que ellas asimilan: mientras esta organización operatoria es aplicada al universo exterior en el transcurso de las acciones efectuadas sobre él, las leyes generales del universo, de las que, por otra parte, estas acciones son el producto, son analizadas desde el interior, por la coordinación de los actos y no desde afuera por la presión de los objetos. Por ello, el conocimiento lógico-matemático constituye una especie única: por un lado consiste en la asimilación de los objetos a la coordinación de las acciones del sujeto, y, por el otro, en una acomodación permanente a los objetos; en efecto, esta coordinación de las acciones del sujeto consiste en acciones generales que convergen con las transformaciones del universo, de las que el cuerpo viviente proviene con sus leyes de asimilación coordinadora. Este proceso no puede presentar un comienzo absoluto, puesto que la asimilación se caracteriza por la incorporación de los objetos a un ciclo de acciones esen-

cialmente cerrado y continuo; ello determina la abstracción reflexiva o regresiva característica de toda construcción operatoria. Por otra parte, como el equilibrio entre la asimilación y la acomodación es la fuente de la reversibilidad mental, la construcción, bajo su aspecto progresivo, es dirigida así por esta exigencia de reversibilidad, condición general de todo equilibrio y conexión permanente entre el punto de llegada de las construcciones y su punto de partida común y que se aleja sin cesar.

En resumen, el problema del contacto entre la matemática y lo real es susceptible así de una solución que conectaría su "objetividad intrínseca" con la objetividad física o extrínseca, pero por intermedio de las coordinaciones psicofisiológicas interiores al sujeto. Como lo hemos visto (punto 2 de este capítulo) la aceptación total de este concepto de objetividad intrínseca no se contradice en nada con la interpretación operatoria de la matemática. Una operación no es una acción aislada y arbitraria, que señale simplemente la actividad combinatoria del sujeto individual, sino que está siempre conectada con un sistema de conjunto que posee, entonces, sus propias leyes y su objetividad como sistema. Explicar el desarrollo de la matemática mediante esquemas de acción que se prolongan en sistemas operatorios equivale, así, a respetar hasta sus límites extremos la coherencia interna de los principios y de los teoremas de todos los sectores de la matemática. Al mismo tiempo, sin embargo, consiste en conectar esta objetividad intrínseca con un principio de equilibrio, es decir, de reversibilidad, que puede vincular la evolución de las operaciones concretas y abstractas al desarrollo mental mismo, que se caracteriza, en cada una de sus fases, por un pasaje de la irreversibilidad a la reversibilidad.

III. Pero, para situar en su verdadera perspectiva esta interpretación de las conexiones entre la matemática y lo real, por intermedio de las estructuras psicobiológicas del sujeto mismo, es necesario dejar de lado, en forma simultánea, tres tipos de realismos posibles, matemático, físico y fisiológico, quizás incompatibles entre sí, pero que, por su acción alternada, deforman en gran medida toda interpretación de conjunto. Para concluir, conviene, entonces, ubicarse en el círculo de las ciencias, que, en el transcurso de los próximos volúmenes, seguiremos analizando en los terrenos físicos y biológicos.

¿Qué se pretende decir, en primer lugar, cuando se afirma la concordancia entre la matemática y la realidad física? Con esta afirmación se pretende expresar el hecho de que las acciones relacionadas con los cambios de posición de los objetos o sobre sus uniones pueden componerse entre sí, sin que sus composiciones sean contradichas por las comprobaciones experimentales; también, que las acciones relacionadas con los cambios de estado de los objetos pueden, a su vez, ser puestas en correspondencia con las operaciones de desplazamiento o de unión. Ahora bien, lo importante reside en el hecho de que la realización de este acuerdo, cuyo carácter de más en más anticipatorio acabamos de recordar, se acompaña siempre con una transformación de lo real. En efecto, en el caso de estas convergencias obtenidas a posteriori tarde o temprano, se produce en relación con

la realidad material, un proceso esencial, sobre el que insistiremos a propósito del conocimiento físico: ello se debe a que el aparato operatorio se adapta en tan gran medida al fenómeno cuya medición debe proporcionar que se convierte en parte integrante de éste; el fenómeno físico se revela, entonces, como indisociable del operador que constituye un aspecto del mismo. De esta manera, entonces, no sólo se produce una adecuación del instrumento intelectual al objeto, incluso cuando el primero está preparado en forma anticipatoria y el segundo es descubierto con retraso en relación con los medios de conocimiento que sirven a posteriori para estructurarlo, sino que también se hace cada vez más difícil conocer la realidad física fuera de esta estructura matemática: se produce una asimilación tan completa de lo real a los esquemas operatorios que la realidad física es transformada poco a poco en relaciones espaciales y métricas y que, al límite del poder de la acción (tal como lo veremos en relación con la microfísica), la operación del sujeto se convierte en solidaria del objeto.

Sin embargo, a pesar de este desplazamiento constante de lo real en el sentido de la matemática, la mayor parte de los físicos están aun convencidos de la existencia objetiva de los entes materiales: el objeto es conocido sólo a través de los instrumentos intelectuales del sujeto, pero sigue siendo objeto. Este realismo suscita deslizamientos y variaciones, y se refuerza a medida que nos aproximamos a los hechos químicos y biológicos. En efecto, si bien en los sectores extremos relativos a las escalas astronómicas o microfísicas existen algunos físicos idealistas (Jeans y Eddington), el realismo se consolida en presencia de las retortas del químico y ningún biólogo duda de la realidad de los entes organizados.

Ahora bien, precisamente en el terreno del organismo vivo se produce, al parecer, una segunda curvatura notable en la curva que vincula al sujeto con el objeto. Al mismo tiempo que presenta una tendencia constante a asimilarse a la objetividad extrínseca de la realidad física, la objetividad intrínseca de la matemática encuentra el objeto en el interior del sujeto, si así puede decirse, en la exacta medida en que los procesos mentales que engendran los entes lógico-matemáticos están ligados a los procesos fisiológicos que caracterizan la organización vital y de los que las funciones sensoriomotrices dependen.

Hemos observado más arriba que la construcción de los entes matemáticos es siempre correlativa de una toma de conciencia de las raíces propias de las totalidades operatorias de las que se extraen estos entes. La teoría de los conjuntos nos lleva, por ejemplo, a las operaciones elementales de correspondencia simple de los primitivos, del niño e incluso, en un sentido sensoriomotor, también del animal (véase el ejemplo citado de las gallinas que picotean sólo los granos pares o impares de una serie rectilínea); la topología recurre a relaciones de entorno, de frontera, de envolvimiento, etc., que son las más simples que conoce la percepción o la acción, y la teoría de los grupos se basa en composiciones operatorias que, bajo su forma más general, corresponden a las coordinaciones más elementales de la acción. Al ser el progreso matemático siempre, al mismo tiempo, reflexivo y constructivo, comporta un factor de análisis regresivo

que remonta hasta las raíces sensoriomotrices de toda operación. Ahora bien, ¿hasta dónde penetran estas raíces?

En epistemología, el punto de vista genético se caracteriza por el hecho de que se niega a afirmar de antemano un sujeto provisto de una estructura intelectual acabada, y que constituya un punto de partida en sí. Son exactamente las mismas razones que impiden aceptar la existencia de objetos planteados de antemanos en sí mismos, independientemente de las actividades del sujeto, y que obligan a explicar estas actividades en función de su desarrollo, progresivo y regresivo, lo que equivale a alejar indefinidamente su punto de origen aparente. Ahora bien, el sujeto constituye al parecer un comienzo absoluto, respecto de las estructuras lógicas y matemáticas, pero sólo en la medida en que se interrumpe el análisis regresivo a nivel de la psicología y, más precisamente, en la medida en que no se cede a las ilusiones de una psicología introspectiva, en lugar de ubicarse en el punto de vista de la conducta. Efectivamente, la vida mental no está suspendida en el vacío. Recurrir a la acción, y singularmente a los movimientos, para explicar la génesis de las operaciones lógico-matemáticas, supone referirse necesariamente a la vida orgánica y comprometerse entonces en una vía que conduce más acá del sujeto aparente o consciente, ya que las raíces de la vida orgánica se encuentran en la realidad física. En la exacta medida en la que el análisis de las formas de pensamiento superiores habla en favor del idealismo, al considerar que el objeto es solidario de las actividades del sujeto, el análisis de las fuentes de la inteligencia reduce el sujeto al objeto por intermedio del organismo. La física aclara una de las zonas de unión entre el sujeto y el objeto, pero la biología es entonces la que debe proporcionarnos la luz necesaria sobre la zona simétrica, al explicarnos la génesis del sujeto a partir del objeto. De la misma forma en que la física contradice al empirismo, al demostrarnos que el objeto es asimilado a las operaciones del sujeto, la biología contradice también al apriorismo al vincular las operaciones con los procesos fisiológicos. Se revela, de este modo, que el empirismo y el apriorismo se originaron ambos en una visión estática de las cosas, como si el sujeto y el objeto estuviesen dados de una vez para siempre: genéticamente, por el contrario, el sujeto y el objeto actuales consisten en porciones singularmente estrechas en relación con la historia intelectual y biológica en la que los recortamos y, para poder resolver el problema epistemológico en su forma general, se debería intentar la reconstitución íntegra de esta historia que comprende la de la vida en su totalidad.

En efecto, si reducimos la reversibilidad operatoria a la reversibilidad creciente de los mecanismos mentales, se plantea un problema biológico cuya importancia es tal que caracteriza por sí solo la historia de las ideas sobre la reversibilidad o la irreversibilidad vitales. Tanto si, como muchos autores desde Helmholtz a Ch. E. Guye lo creyeron, la vida escapa a la acción del segundo principio de la termodinámica, como si está sometida a éste, al igual que los otros fenómenos físico-químicos, de todas formas se debe vincular la reversibilidad mental con los mecanismos nerviosos:

o bien esta forma de reversibilidad parecerá estar preparada por los procesos vitales más generales, o bien, por el contrario, se presentará como una forma de equilibrio particular entre el organismo y el medio, imposible de alcanzar en ciertos sectores, aunque realizada por las coordinaciones cognitivas. En este último caso, éstas no serían menos solidarias de las coordinaciones orgánicas, que las que representarían un nivel superior de equilibrio. En ambos casos, entonces, cabe preguntarse si las estructuras operatorias más generales no están condicionadas por ciertas necesidades funcionales propias de toda organización viviente. Los encajes y las seriaciones, las composiciones o coordinaciones, los rodeos y retornos, etc., aunque estructurados en forma diferente en los diversos niveles del desarrollo mental, no por ello expresan en menor grado caracteres comunes a todos los modos de funcionamiento asimilatorio: toda asimilación supone la conservación de un ciclo que se cierra sin cesar sobre sí mismo; es probable que de este funcionamiento, característico de la vida, dependa el secreto de la construcción indefinida de los esquemas mentales y finalmente lógico-matemáticos, en relación con los que el propio Lautman señaló el parentesco con los conceptos de totalidad orgánica.

Mediante estas observaciones no pretendemos resolver el menor problema positivo, sino mostrar, simplemente, una parte del programa que se debe cumplir antes de que la epistemología pueda tomar partido en lo que se refiere a las relaciones entre el sujeto y el objeto, cuando estas relaciones son interiores al organismo y no sólo dadas en la acción exterior de cada sujeto. A este respecto, para tratar las relaciones entre el sujeto y el objeto sería tan indispensable conocer la relación entre un acto de comprensión inteligente, caracterizada por sus combinaciones reversibles, los mecanismos nerviosos del cerebro y los procesos físico-químicos o incluso microfísicos que se desarrollan en la sustancia cerebral, como la relación entre el acto de inteligencia y el objeto exterior al organismo sobre el que se efectúa.

Pese a que nuestros conocimientos sobre las relaciones entre las estructuras intelectuales y la vida son aún rudimentarios, sobre todo en lo que concierne a las estructuras lógico-matemáticas, existen pese a ello, algunos hechos, ya analizados, que incitan a la reflexión. De este modo, la psicología humana realiza un gran esfuerzo para reducir los elementos del espacio, del número o de las clases y de las relaciones a las conductas sensoriomotrices del primer año o a las estructuras perceptuales, etc. Sin embargo, estas conductas sensoriomotrices, por su parte, están precedidas por montajes hereditarios o reflejos, cuyas manifestaciones son integradas con rapidez en el hombre en las construcciones adquiridas, pero que se desarrollan bajo una forma más pura y rica en el instinto animal. Ahora bien, sería necesario elaborar una geometría y un análisis lógico-aritmético de las conductas y de las construcciones instintivas. Desde la cera de un panal, las figuras múltiples de una tela de araña y las relaciones de orden, hasta los encajes de esquemas de acción y las cuantificaciones que supone la sucesión de las conductas reflejas que caracterizan a todos los instintos constructores, se

podrían encontrar los elementos, no de *operaciones* lógico-matemáticas, sino de una *estructuración sensoriomotriz hereditaria* de carácter lógico-matemático bastante desarrollado. Desde un punto de vista matemático, nada sería más llamativo que este estudio de las estructuras prematemáticas instintivas.

Ahora bien, cuando la inteligencia construye "formas" que son las de los diversos sistemas operatorios, éstas parecen inmateriales, en la medida en que las conductas características de las operaciones concretas se interiorizan en estructuras formales con base puramente simbólica. Sin embargo, al mismo tiempo que formas de conductas, las "formas" elaboradas por el instinto son "formas" ligadas a la estructura de los órganos. El instinto es la lógica de los órganos, y si a su respecto se puede hablar de estructuraciones lógico-matemáticas, se trata de una prolongación de las estructuras orgánicas. Ahora bien, precisamente en este punto la matemática encuentra a la biología en la forma más directa y natural; cabe lamentar que la única matemática biológica que existe sea la que se utiliza para los requerimientos de la biometría aplicada al estudio de la variación o de las leyes de la herencia. Por ello se debe señalar con énfasis el interés del notable estudio del célebre biólogo d'Arcy Thomson [35] sobre las relaciones geométricas que caracterizan la estructura de los organismos más diversos, y sobre todo la forma de las especies, géneros o familias vecinas. En la obra de d'Arcy Thomson se encuentran en particular, las concepciones más sugestivas sobre las transformaciones geométricas que caracterizan el pasaje de una estructura a otra: por ejemplo, de los estiramientos o contracciones topológicas o afines que conectan formas de peces métricamente diferentes, pero homeomorfos en lo que se refiere a sus otros aspectos, etc. Un análisis semejante, aplicado no sólo a las formas anatómicas sino también a las "formas" de conducta hereditaria o instintiva (conducta motriz o construcciones) proporcionaría un aporte esencial al estudio de la fuente biológica de las estructuras mentales y en consecuencia cognitivas, incluyendo estructuras lógico-matemáticas.[36]

Sin embargo, si, como acabamos de verlo, no es quimérico concebir la posibilidad de un análisis regresivo de las actividades del sujeto en el terreno de las conductas instintivas e incluso de la morfogénesis orgánica en general, nos comprometemos evidentemente en un círculo. El hecho biológico es una variedad particular de los hechos físico-químicos o físicos y, en la actualidad, se está escribiendo todo un capítulo de la ciencia en lo que concierne a las relaciones entre la microfísica y la biología. La matemática y la lógica están en un acuerdo constante con la realidad física exterior al sujeto, y explican esta realidad física asimilándola cada vez más a ellas y las estructuras lógico-matemáticas podrían parecer un día condicionadas por un funcionamiento orgánico cuyas raíces se encuentren

35 D'Arcy Thomson: *On growth and form*. Cambridge, 1942.

36 Respecto del problema de la convergencia entre las formas matemáticas y las estructuras morfogenéticas, véase la curiosa observación de Hilbert; citado en este volumen, cap. II, § 6, sobre las leyes de la herencia y los axiomas de congruencia lineal.

en el universo físico-químico. Suponiendo que la explicación biológica logre alguna vez un carácter de precisión y de construcción teórica rigurosa de los que aún carece, nos veríamos, entonces, frente a un círculo real.

En el estado actual de los conocimientos, por el contrario, se trata sólo de un círculo ideal, dada la imposibilidad de dominar las relaciones entre lo mental y lo biológico, por un lado, y entre lo biológico y lo físico por el otro (dos tipos de relaciones que algún día podrían interferir). De todas maneras, y desde un punto de vista epistemológico, donde las lagunas mismas de este círculo corresponden a un punto de importancia capital, las zonas de unión entre el sujeto y el objeto no deben situarse sólo en el terreno límite entre la matemática y la física, sino también, y simétricamente, en el que concierne a las relaciones entre la biología (o la psicobiología) y la física. Ahora bien, estas relaciones pueden presentar las combinaciones más diferentes entre el sujeto y el objeto. Al ligar al funcionamiento de la vida los mecanismos esenciales de la inteligencia y del conocimiento, se aleja simplemente el problema central de las relaciones entre el sujeto y el objeto, convertido en el problema de la relación entre el organismo y el medio, pero se deja abierta la serie de las soluciones epistemológicas posibles (en relación con las cuales veremos luego que se corresponden término a término con las soluciones del problema biológico de la adaptación y de la variación). En los conocimientos biológicos contemporáneos, en efecto, nada nos obliga a considerar que el organismo se encuentra sometido pasivamente a las acciones del medio, y nada nos obliga, tampoco, a considerarlo como una expresión directa de los procesos físico-químicos conocidos en la actualidad. Recién el día en que podamos caracterizar las relaciones exactas entre la vida y la materia inorgánica, por un lado, y entre el funcionamiento orgánico y el medio exterior, por el otro, podremos construir una epistemología precisa de las relaciones "interiores" entre el sujeto y el objeto (por oposición a las relaciones exteriores entre la actividad operatoria y el mundo físico en el que se efectúan nuestras acciones).

El análisis que hemos intentado sobre el conocimiento matemático, en esta primera parte de nuestra obra, requiere entonces, como complemento indispensable, un estudio de las relaciones entre el pensamiento matemático y el conocimiento físico (vol. II), pero también una investigación sobre el alcance epistemológico del conocimiento biológico (tercera parte, vol. III), antes de poder examinar, nuevamente, los problemas específicos del conocimiento psicosociológico (cuarta parte, vol. III).

Libro
impreso en
los talleres EDIGRAF
Delgado 834, Buenos Aires,
Argentina, en el mes
de agosto de
1975